

УДК: 532.533, 517.958:532.546

А.Қалтаев*, Д.Айжулов, М.Құрмансейт*КазННТУ им. К.Сампаева***E-mail: Aidarkhan.kaltayev@gmail.com*

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНЕЗИСА ИНФИЛЬТРАЦИОННЫХ УРАНОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ И РАЗРАБОТКА НОВОГО ГЕОСТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Қалтаев А., д.ф.-м.н., проф., E-mail: Aidarkhan.kaltayev@gmail.com; ORCID 0000-0003-2180-2785**Айжулов Д.Е.**, PhD, E-mail: daniar.aizhulov@gmail.com; ORCID 0000-0001-5496-4639**Құрмансейт М.Б.**, PhD, E-mail: kurmanseiit.maksat@gmail.com; ORCID 0000-0002-5334-6537

Урановые месторождения ролл-фронтального типа формируются в песчаниках или аркозах на границах восстановленных и окисленных геохимических зон, обычно перекрытых слабо проницаемыми аргиллитами или алевроито-глинистыми слоями. Такая структура делает их особенно подходящими для подземного выщелачивания.

Ранее стохастическое моделирование фокусировалось на распределении содержания урана, не учитывая фильтрационные и реактивно-транспортные процессы, важные для формирования залежей. Настоящая работа предлагает интеграцию вычислительной гидродинамики в геостатистические алгоритмы с целью повышения точности прогноза распределения руды.

Вместо традиционных расстояний при расчёте вариограмм используется время пролёта (Time of Flight, TOF) водных частиц вдоль линий тока. Этот подход, учитывающий данные скважин, улучшает моделирование пространственной структуры месторождений.

Показано, что методы, основанные на стохастическом моделировании линий тока, обеспечивают более точную интерполяцию и оценку запасов, чем классические геостатистические техники. Также предложена методика генерации синтетических месторождений на основе численного моделирования гидродинамики и химической кинетики, позволяющей объективно оценивать качество геологических моделей и надёжность стохастических подходов.

Ключевые слова: отложения минералов типа ролл-фронта; моделирование реагирующего переноса; геостатистика; метод кригинга; геомоделирование.

А.Қалтаев*, Д.Айжулов, М.Құрмансейт*К.Сампаев атындағы ҚазҰТЗУ***E-mail: Aidarkhan.kaltayev@gmail.com*

ИНФИЛЬТРАЦИЯЛЫҚ УРАН КЕН ОРЫНДАРЫНЫҢ ГЕНЕЗИСІН ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ МОДЕЛЬДЕУДІҢ ЖАҢА ГЕОСТАТИСТИКАЛЫҚ ӘДІСІН ӘЗІРЛЕУ

Қалтаев А., д.ф.-м.н., профессор, E-mail: Aidarkhan.kaltayev@gmail.com;

ORCID 0000-0003-2180-2785

Айжулов Д.Е., PhD, E-mail: daniar.aizhulov@gmail.com; ORCID 0000-0001-5496-4639**Құрмансейт М.Б.**, PhD, E-mail: kurmanseiit.maksat@gmail.com; ORCID 0000-0002-5334-6537

Ролл-фронт типті уран кен орындары әдетте құмтастарда немесе аркоздарда, қалпына келтірілген және тотығу геохимиялық аймақтарының шекараларында түзіледі, олар көбінесе нашар өткізгіш аргиллиттермен немесе алевроит-балшықты қабаттармен жабылған. Мұндай геологиялық құрылым бұл кен орындарын жерасты сілтісіздендіру әдісіне өте қолайлы етеді.

Бұрынғы стохастикалық модельдерде уранның таралуы ғана ескеріліп, қабаттардың сүзгілік қасиеттері мен реактивті-тасымалдау процестері назардан тыс қалатын. Бұл жұмыста кеннің таралуын дәлірек болжау үшін геостатистикалық алгоритмдерге есептік гидродинамиканы интеграциялау ұсынылады.

Вариограммаларды есептеу кезінде дәстүрлі қашықтықтардың орнына су бөлшектерінің ағын сызықтары бойымен қозғалатын уақыты – **Time of Flight (TOF)** қолданылады. Бұл тәсіл ұңғымалардан алынған деректерді ескере отырып, кен орнының кеңістіктік құрылымын дәлірек модельдеуге мүмкіндік береді.

Зерттеу нәтижелері көрсеткендей, ағын сызықтарының стохастикалық моделіне негізделген әдістер классикалық геостатистикалық тәсілдерге қарағанда интерполяция мен қор бағалауын дәлірек жүзеге асырады. Сонымен қатар, гидродинамика мен химиялық кинетиканың сандық модельдеуіне негізделген синтетикалық кен орындарын генерациялау әдістемесі ұсынылып отыр. Бұл геологиялық модельдердің сапасы мен стохастикалық тәсілдердің сенімділігін объективті түрде бағалауға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: *ролл-фронт типті минералдардың шөгінділері; реактивті тасымалдауды модельдеу; геостатистика; кригинг әдісі; геомодельдеу.*

А.Қалтаев*, Д.Айжулов, М.Құрмансейт

KazNTU named after K.Satpayev

**E-mail: Aidarkhan.kaltayev@gmail.com*

INVESTIGATION OF THE GENESIS OF INFILTRATION URANIUM DEPOSITS AND DEVELOPMENT OF A NEW GEOSTATISTICAL MODELING METHOD

Kaltaev A., Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor, E-mail:

Aidarkhan.kaltayev@gmail.com; ORCID 0000-0003-2180-2785

Aizhulov D.E., PhD, E-mail: daniar.aizhulov@gmail.com; ORCID 0000-0001-5496-4639

Kurmanseit M.B., PhD, E-mail: kurmanseiit.maksat@gmail.com; ORCID 0000-0002-5334-6537

Roll-front uranium deposits are formed in sandstones or arkoses at the boundaries between reduced and oxidized geochemical zones, typically overlain by low-permeability argillites or silt-clay layers. This structure makes them particularly suitable for in-situ leaching.

Previous stochastic modeling efforts have primarily focused on uranium grade distribution, without accounting for filtration and reactive transport processes critical to deposit formation. This study proposes integrating computational hydrodynamics into geostatistical algorithms to improve the accuracy of ore distribution prediction. Instead of using traditional Euclidean or curvilinear distances in variogram calculations, this approach incorporates Time of Flight (TOF) of water particles along flow paths. Combined with borehole data, this method enhances modeling of the deposit's spatial structure. It is demonstrated that flow-line-based stochastic methods provide more accurate interpolation and resource estimation than conventional geostatistical techniques.

Additionally, a methodology is proposed for generating synthetic deposits based on numerical modeling of hydrodynamics and chemical kinetics of mineral precipitation and dissolution. This allows for an objective assessment of geological model accuracy and the reliability of stochastic approaches.

Keywords: mineral deposits of the roll-front type; modeling of reactive transport; geostatistics; kriging method; geomodeling.

ВВЕДЕНИЕ

Казахстан занимает второе место в мире по запасам урана (до 12% мировых ресурсов) и обеспечивает около 40% глобального производства [1]. Это стало возможным благодаря применению технологии подземного скважинного выщелачивания (ПСВ, Рис.1) – эффективного и экономичного метода добычи, особенно для проницаемых песчаных месторождений [2]. С 2009 года внедрение ПСВ позволило увеличить объёмы добычи урана в стране в шесть раз [2, 3].



Однако уран относится к тем ресурсам, чья добыча существенно опережает темпы разведки. Казахстан долгое время сосредотачивался на месторождениях с рентабельной концентрацией (менее \$80/кг), но объём таких ресурсов сократился более чем на 40%, что снижает экономическую устойчивость отрасли [3]. Поэтому становится особенно важным более точное определение подлежащие разработке промышленных запасов оксидов урана. Особую ценность в этом смысле представляют исследования генезиса инфильтрационных урановых месторождений (месторождения типа ролл-фронта), на которые приходится до 60% мировой добычи урана, включая большинство казахстанских месторождений [4–6]. Эти залежи формируются на редокс-границах в проницаемых породах, где уран осаждается из водных растворов при восстановительных реакциях [7]. Дождевая вода, богатая кислородом, поступая в зону фронта, вызывает растворение ранее осаждённых минералов и способствует миграции фронта вниз по склону (Рис. 2).

Согласно МАГАТЭ и исследованиям Далькампа [4,8,9], ролл-фронты классифицируются по форме:

- (i) вертикальные серповидные тела между непроницаемыми слоями,
- (ii) горизонтальные синусоидальные фронты,
- (iii) чёткая граница в тыловой части и диффузный переход в фронтальной. В плане – это извилистые пояса длиной до 30 км и шириной от 20 до 1000 м; в разрезе – асимметричные тела толщиной 1–30 м.

Разведка инфильтрационных залежей месторождений осуществляется методом бурения с постепенным уточнением сетки скважин от километров до десятков метров. Это является необходимым для оценки конфигурации залежи и планирования применения метода подземного скважинного выщелачивания [10]. Эффективность ПСВ напрямую зависит от точности геомоделирования, необходимого для расчёта запасов, проектирования посадки скважин и оценки экономической целесообразности.

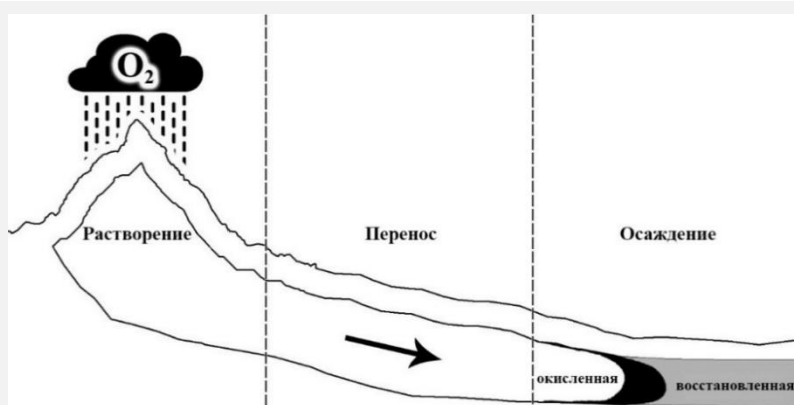


Рисунок 2. Схематическое изображение стадий генезиса отложений ролл-фронта.

Традиционные методы геомоделирования основаны на геостатистике или ГИС-интерпретации [10], включая Pluri-Gaussian моделирование [9, 11]. Однако эти подходы слабо учитывают фильтрационные и реакционно-транспортные процессы, сопровождавшие формирование залежей. При эпигенетической природе образования ролл-фронтов уран распределяется неравномерно, создавая сложную геометрию и высокую вариативность данных, что требует специальных математических методов преобразований, например, гауссовых преобразований [8].

Настоящая работа направлена на интеграцию вычислительной гидродинамики в геостатистическое моделирование с целью повышения точности прогноза пространственного распределения урана. Также предлагается методика генерации синтетических месторождений на основе численного моделирования гидродинамики и химической кинетики, позволяющая объективно оценивать точность геологических моделей. Для этого сначала проведено численное воспроизведение лабораторного эксперимента по моделированию реагирующих течений с образованием редокс-границ в проницаемых породах. Полученные данные использованы для калибровки модели, описывающей основные механизмы образования ролл-фронтов, включая осаждение и растворение урана. Это способствует лучшему пониманию факторов, определяющих серповидную форму залежей, и может снизить затраты на разведку и добычу минералов. Результаты также применимы к моделированию других месторождений, сформированных в условиях инфильтрации и осаждения на редокс-интерфейсах.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

1. Количественная модель формирования месторождений ролл-фронтального типа

Рудные залежи ролл-фронтального типа характеризуются скоплениями минерализации в виде вытянутого языка, включающей уран, селен и молибден, в проницаемых песчаниках [12]. Эти залежи обычно содержат так называемый геохимический барьер между восстановленной и окисленной средами. Взаимодействие окислительно-восстановительных реакций между окислителями и восстановителями создаёт благоприятные условия для осаждения урана, тогда как постоянный приток окислителей приводит к растворению урановых минералов, вызывая реактивный перенос веществ [13]. Предыдущие исследования в основном были сосредоточены либо на характеристиках ролл-фронтальных залежей, либо на описании химических и геологических процессов, участвующих в их формировании.

1.1 Процесс формирования ролл-фронта

Формирование урановой минерализации в месторождениях ролл-фронтального типа обусловлено комплексным взаимодействием гидродинамических, геохимических и литологических факторов. Как показано в ряде исследований [11, 14], движение подземных вод, контролируемое рельефом местности и гравитационными силами, оказывает решающее влияние на миграцию и последующее осаждение урана. Значимую роль при этом играют проницаемость пород-хозяев и наличие редокс-барьеров, создающих условия для фиксации ураносодержащих растворов и последующего образования руд.

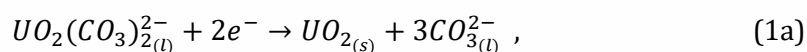
К числу основных факторов, определяющих морфологию рудных тел, относятся:

- наличие гидравлического градиента, обеспечивающего движение подземных вод;
- фильтрационные свойства пород, определяющие геометрию залежей;
- экранирование рудных тел слабопроницаемыми или водонепроницаемыми слоями;
- характерная синусоидальная форма минерализации в плане и серповидная – в разрезе.

Предлагаемая модель количественной оценки потенциальных ресурсов учитывает начальную и остаточную концентрации урана в растворе, проницаемость среды, гидравлический уклон, длительность процесса рудообразования и степень выраженности редокс-градиента. Такой подход позволяет повысить точность прогноза рудной минерализации.

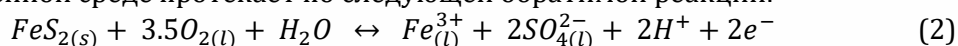
Осаждение и растворение урана происходят в результате сложных реакционно-транспортных процессов, чувствительных к таким параметрам, как температура, давление, окислительно-восстановительный потенциал (Eh), pH и состав подземных вод. Недостаточная изученность этих параметров затрудняет точное моделирование.

Согласно литературным данным [14, 15], уран в окисленных водоносных горизонтах мигрирует преимущественно в виде устойчивых карбонатных комплексов, таких как $UO_2(CO_3)_3^{4-}$ и $UO_2(CO_3)_2^{2-}$. При попадании в восстановительную среду происходит его осаждение, что описывается следующей прямой реакцией:

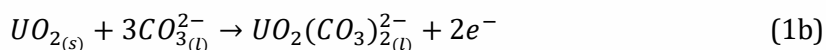


где индекс *l* означает, что вещество находится в жидкой форме, а *s* – в твердой.

В качестве восстановителей (доноров электронов), участвующих в формировании геохимического барьера, могут выступать один из наиболее распространённых в земной коре сульфидов – пирит (FeS_2), а также органические вещества. Например, окислительно-восстановительное поведение пирита в окисленной среде протекает по следующей обратимой реакции:



Окисленные воды способны вновь растворять урановые минералы по обратной к (1a) реакции:



Аналогичные схемы возможны и для других минералов.

1.2 Моделирование эмпирического эксперимента

С учётом принципов формирования ролл-фронтов и результатов лабораторного эксперимента проведено численное моделирование для выявления факторов и механизмов, определяющие формирование ролл-фронтов.

Для моделирования формирования рудных тел типа ролл-фронт использованы результаты лабораторного эксперимента Евсеевой и др. [16], в котором проведен опыт по имитации образования урановых ролл-фронтов в пластиковом контейнере (трубе прямоугольного сечения). В работе прозрачный контейнер размером $2 \times 0,15 \times 0,2$ м. заполнен песком, затем превращением оксидов железа в сульфиды среда химически восстановлена. После этого в течение 60 суток через контейнер пропущена вода, содержащая растворённый уран с концентрацией 10^{-6} – 10^{-5} г/л и окислитель, что привело к формированию роллообразного скопления урана.

Основной химический процесс в эксперименте – окислительно-восстановительный. Полученное распределение урана с ростом концентрации и продвижением зоны окисления в восстановленные пески успешно имитировало роллообразные залежи, хотя механизмы их формирования не объяснены. Концентрация урана убывала по длине контейнера, с максимумом у входа.

На основании условий эксперимента для численного моделирования были сделаны следующие допущения:

1. жидкости несжимаемы, движение реагентов происходит в водной среде;

2. диффузионный перенос минерала значительно уступает конвективному переносу;
3. восстановитель присутствует в избытке по сравнению с другими реагентами;
4. концентрация окислителя мала ($\sim 0,001$ г/л), что соответствует содержанию кислорода в подземных водах Центральной Азии [11].

Как видно, процессы формирования роллообразного минерала включают фильтрацию несжимаемой жидкости через пористую среду, поэтому основой для моделирования гидродинамики является закон Дарси

$$\vec{u} = \vec{v}\phi = -k\nabla h \quad (3)$$

и закон сохранения массы несжимаемой жидкости

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (\vec{v}\phi) = 0,$$

где $\vec{u} = \vec{v}\phi$ – средняя скорость фильтрации жидкости в пористой среде (скорость Дарси) [$\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$], $\vec{v}$ – средняя скорость жидкости в порах, ϕ – пористость среды ($0 < \phi \leq 1$), k – коэффициент фильтрации, $h = p/\rho g$ – гидродинамический напор в пласте, p – давление в пласте, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести.

Эти два уравнения сводятся к одному 3D эллиптическому уравнению относительно гидродинамического напора:

$$\nabla \cdot (k\nabla h) = 0 \quad (4)$$

и решается численным методом при заданных значениях давления или расходов жидкости на границах. По найденному полю давления из закона Дарси (3) определяется поле фильтрационной скорости.

Для численного моделирования эксперимента Евсеевой и др. была рассмотрена двумерная полуоткрытая труба с входом потока жидкости слева и выходом – справа (Рис. 3).

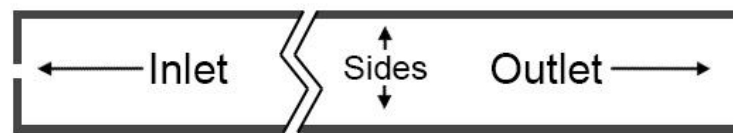
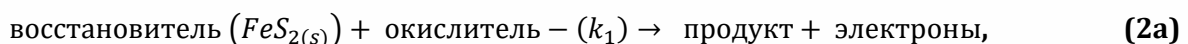


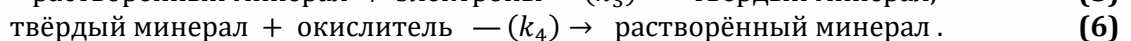
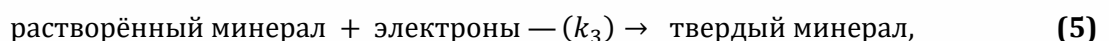
Рисунок 3. Схема лабораторного контейнера для имитации образования урановых ролл-фронтов [16].

Описание зависимостей скоростей химических реакций от концентраций исходных веществ выполнено в рамках закона действующих масс. Окислительно-восстановительная обратимая реакция между восстановителем и окислителем (реакция (2)) была представлена в упрощённом виде следующей схемой:



Согласно этой схеме, концентрации электронсодержащих соединений и побочных продуктов являются результатом окисления восстановителя.

Электрон содержащие компоненты играют ключевую роль в переходе урана из растворённого состояния в твёрдую фазу. В предлагаемой модели учитываются концентрации как растворённых, так и осаждённых форм урановых соединений. Как уже отмечалось ранее, в природных условиях урановые минералы могут подвергаться вторичному растворению под воздействием кислородсодержащих вод. В связи с этим процессы осаждения и растворения урановых минералов в модели описываются следующей упрощённой схемой:



Уравнение, описывающее обратимое изменение концентрации восстановителя по реакции (2) в твердой фазе основано на законе действующих масс и может быть выражено следующим образом:

$$(1 - \phi)\rho_s \partial C_{red}/\partial t = k_2 C_e C_{pr} - k_1 C_{red} C_{ox}, \quad (7)$$

где C_{red} – концентрация восстановленной среды $[g \cdot l^{-1}]$, C_e – концентрация электронсодержащих элементов $[g \cdot l^{-1}]$, C_{pr} – концентрация продукта окисления восстановителя $[g \cdot l^{-1}]$, C_{ox} – концентрация окислителя $[g \cdot l^{-1}]$, k_1, k_2 – константы реакции, t – время $[sec]$, ρ_s – плотность твёрдых веществ $[kg \cdot m^{-3}]$.

Аналогично, концентрация окислителя в жидкой фазе увеличивается в результате реакции с восстановителем (прямая реакция (2) или (2а)), и уменьшается при окислении твёрдых урановых комплексов по реакциям (1b или (6)), что можно описать следующим уравнением:

$$\phi \rho_l (\partial C_{ox}/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla C_{ox}) = k_2 C_e C_{pr} - k_1 C_{red} C_{ox} - k_4 C_{sol} C_{ox}, \quad (8)$$

где C_{sol} – концентрация осажденного минерала $[g \cdot l^{-1}]$, ρ_l – плотность жидкостей $[kg \cdot m^{-3}]$.

Уравнение (8) содержит конвективный член $\vec{v} \cdot \nabla C_{ox}$, отражающий перенос окислителя, находящегося в растворённой фазе, за счёт движения жидкости в порах. Изменения концентрации редокс-продукта и электронов в растворённых фазах по реакциям (1а), (1b), (5) можно описать следующими уравнениями, соответственно:

$$\phi \rho_l (\partial C_{pr}/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla C_{pr}) = k_1 C_{red} C_{ox} - k_2 C_e C_{pr}, \quad (9)$$

$$\phi \rho_l (\partial C_e/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla C_e) = k_1 C_{red} C_{ox} - k_2 C_e C_{pr} - k_3 C_e C_{dis}. \quad (10)$$

Электроны играют решающую роль в процессах растворения урана согласно реакциям (5) и (6); их концентрация описывается следующим уравнением:

$$\phi \rho_l (\partial C_{dis}/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla C_{dis}) = k_4 C_{sol} C_{ox} - k_3 C_e C_{dis}. \quad (11)$$

Процессы осаждения и растворения урановых минералов согласно реакциям (5) и (6), как ключевые факторы, определяющие кристаллизацию урана, описываются следующим уравнением:

$$(1 - \phi)\rho_s \partial C_{sol}/\partial t = k_3 C_e C_{dis} - k_4 C_{sol} C_{ox}. \quad (12)$$

В численном эксперименте использованы граничные условия, соответствующие тем, что применялись в лабораторном эксперименте, проведённом в [16]. В частности, для давления были заданы следующие граничные условия: отсутствие потока на боковых границах области и задание гидравлического напора на границах притока и оттока:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_{sides} = 0 \text{ или } \partial p / \partial n|_{sides} = 0, \quad p|_{in} = p_{atm} + \rho g h, \quad p|_{out} = p_{atm}.$$

На входе в контейнер было задано постоянное граничное условие для скорости потока, равной $1,44 \times 10^{-4}$ м/с, что соответствует высоте напора $h=0,74$ м. Поскольку в контейнер подаётся только растворённый уран, граничные условия для всех концентраций в жидкой фазе задаются следующим образом (в г/л):

$$C_{dis}|_{in} = 7.5 \cdot 10^{-5}, \quad C_{ox}|_{in} = 0.002, \quad C_e|_{in} = 0, \quad C_{pr}|_{in} = 0, \\ \partial C_{dis} / \partial n|_{sides} = 0, \quad \partial C_{ox} / \partial n|_{sides} = 0, \quad \partial C_e / \partial n|_{sides} = 0, \quad \partial C_{pr} / \partial n|_{sides} = 0.$$

Начальные концентрации жидкостей и твёрдой фазы:

$$C_{dis}|_{t=0} = 0, \quad C_{ox}|_{t=0} = 0, \quad C_e|_{t=0} = 0, \quad C_{pr}|_{t=0} = 0, \quad C_{sol}|_{t=0} = 0, \quad C_{red}|_{t=0} = 1.$$

До начала поступления потока контейнер не содержал урана и включал восстановленную пористую среду, состоящую из песка и закисленного железа. Пористость ϕ принята равной 0.25.

1.3 Результаты численного моделирования эмпирического эксперимента

Согласно предлагаемой модели, образование твёрдой фазы урана происходит исключительно в результате процесса осаждения. Получение аналитического решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с заданными начальными и граничными условиями представляется невозможным, в связи с чем были применены численные методы решения уравнений (7)–(12) с использованием программного комплекса COMSOL Multiphysics [17]. На последующем этапе было разработано специализированное программное обеспечение для численного моделирования на платформе C#.NET.

После многократной корректировки скоростей химических реакций методом подбора, численные результаты начали удовлетворительно согласовываться с экспериментальными данными (см. рисунок 4).

Повышенные концентрации урана в начальной части модельной области, по-видимому, обусловлены сравнительно низкой скоростью окисления урановых минералов по сравнению со скоростью фильтрационного потока. Как видно на рисунке 4, часть твёрдых соединений урана была повторно осаждена в течение короткого временного интервала, что привело к локальному увеличению концентрации урана до 0,015 г/л на расстоянии 15 см от входной границы.

Аналогично лабораторным наблюдениям, лишь незначительное количество восстановителя было выщелочено и перенесено на большее расстояние от входа. Наличие окисленного восстановителя четко прослеживается как в лабораторном эксперименте, так и в численном моделировании.

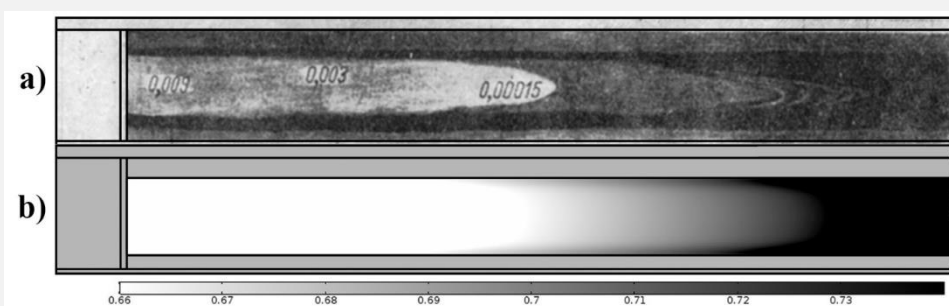


Рисунок 4. Сравнение изменения степени окисления: (а) экспериментальные данные, отражающие распределение концентрации восстановителя вдоль контейнера [16]; (b) модельное распределение восстановителя, полученное в результате численного моделирования.

Численный подход дал результаты, близкие к экспериментальным данным, при условии, что скорость восстановительной реакции была значительно выше скорости окислительной реакции (см. Рис.5). Это свидетельствует о том, что концентрация восстановителя превышала концентрацию окислителя.

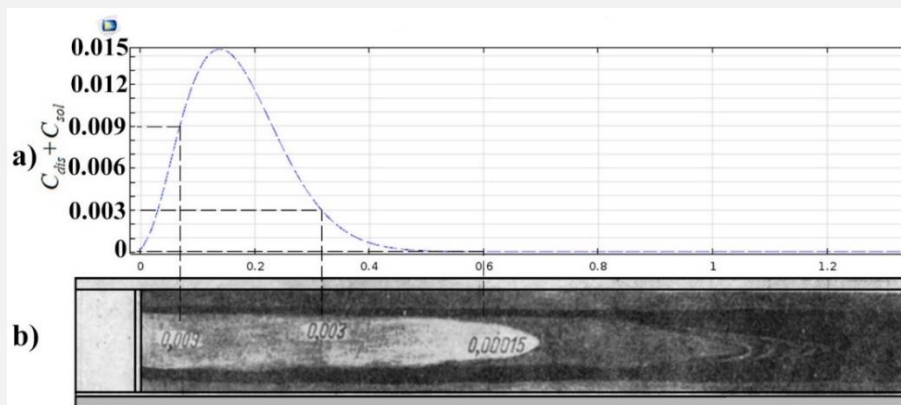


Рисунок 5. Сравнение общей концентрации урана (включая твёрдую и растворённую фазы, [г/л]) в зависимости от расстояния от входного отверстия контейнера ([м]): результаты численного моделирования и лабораторного эксперимента.

После успешной калибровки модели по результатам лабораторного эксперимента, численное моделирование было проведено с целью изучения формирования серповидных ролл-фронтных скоплений урана на более длительном временном интервале. Модель, представленная на рисунке 6, охватывает период в 3300 дней при скорости притока 10^{-4} м/с. Как видно, форма ролл-фронта сохраняется, и за это время смещается примерно на 15 метров по направлению потока жидкости.

Следует отметить, что несмотря на отсутствие в уравнении для концентрации твёрдого урана членов, отвечающих за конвекцию и диффузию, фронт постепенно смещается с течением времени (см. Рис. 6). Это смещение является следствием протекающих в среде реакций растворения и осаждения. В процессе происходит выщелачивание восстановителя, его повторное осаждение совместно с урановыми минералами, а также частичное потребление восстановителя для восстановления растворенного урана.

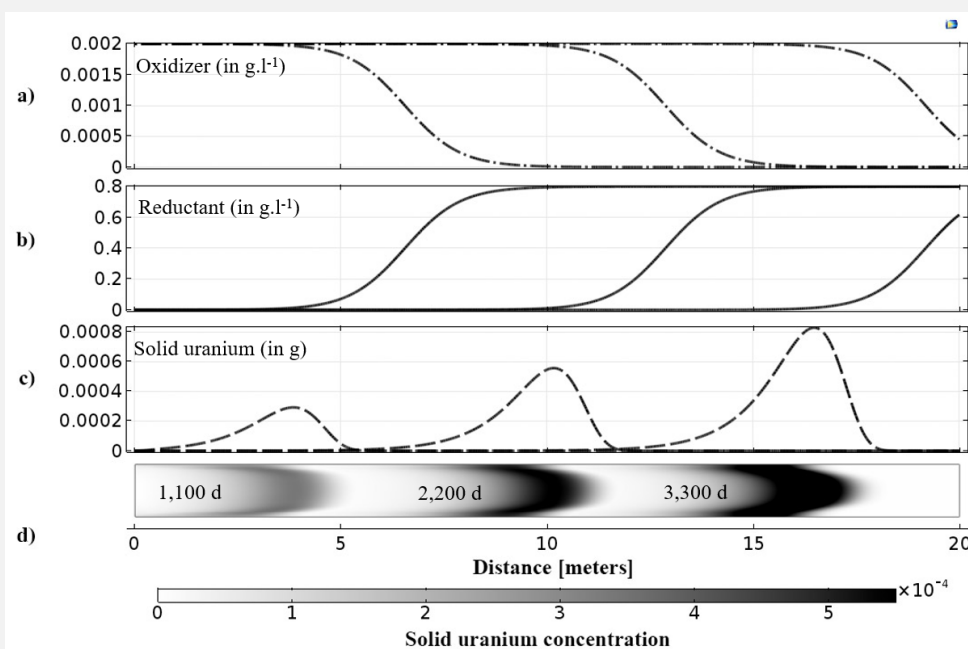


Рисунок 6. Процесс повторного осаждения твёрдого урана за период 3300 дней: (а) концентрация окислителя; (б) концентрация восстановителя; (с) концентрация твёрдого урана; (d) визуализация распределения концентрации твёрдого урана в двумерном сечении.

Согласно Бровину, на основе геологических наблюдений было зафиксировано явление, при котором растворённый уран проходит сквозь зону восстановителя и осаждается далее по потоку в другой восстановленной области [18].

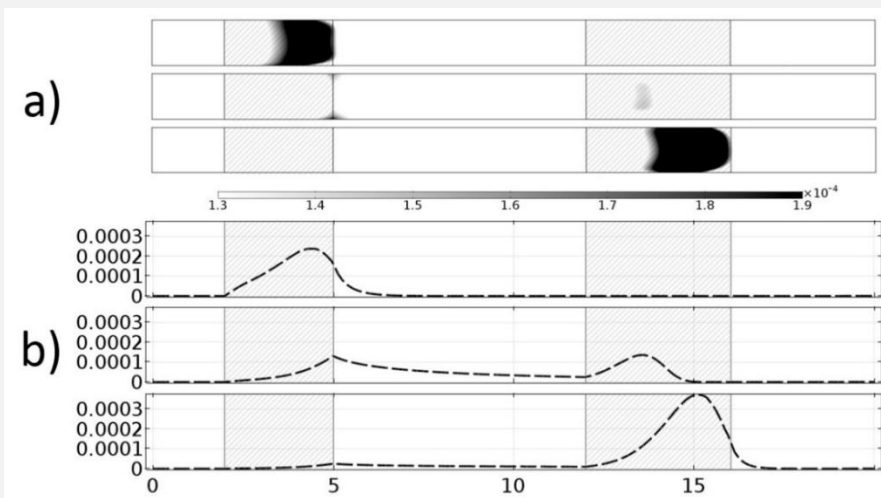


Рисунок 7. Миграция урана между восстановительными зонами: (а) концентрация урана в твёрдой фазе в двумерном сечении (2D); (б) концентрация урана в твёрдой фазе вдоль одномерного профиля (1D).

Для воспроизведения таких условий было проведено численное моделирование с введением двух зон восстановителя в пределах одного канала, как показано на рисунке 7. В данной конфигурации возможно одновременное формирование двух роллфронтов в одном и том же горизонте. По мере истощения восстановителя в верхней (по потоку) зоне, минералы начинают мигрировать в нижнюю восстановленную зону, где и происходит их повторное осаждение.

Численные расчёты также показали, что скорость движения роллфронта имеет почти линейную зависимость от скорости подземного фильтрационного потока.

Линейная зависимость сохраняется и при различных концентрациях восстановителя. Следовательно, можно заключить, что отношение скорости перемещения роллфронта к скорости потока грунтовых вод остаётся постоянным. Например, при концентрации окислителя 0,02 г/л и восстановителя 0,8 г/л, скорость повторного осаждения урана в пределах роллфронта примерно в 240 раз ниже скорости потока грунтовых вод (см. Рис. 8).

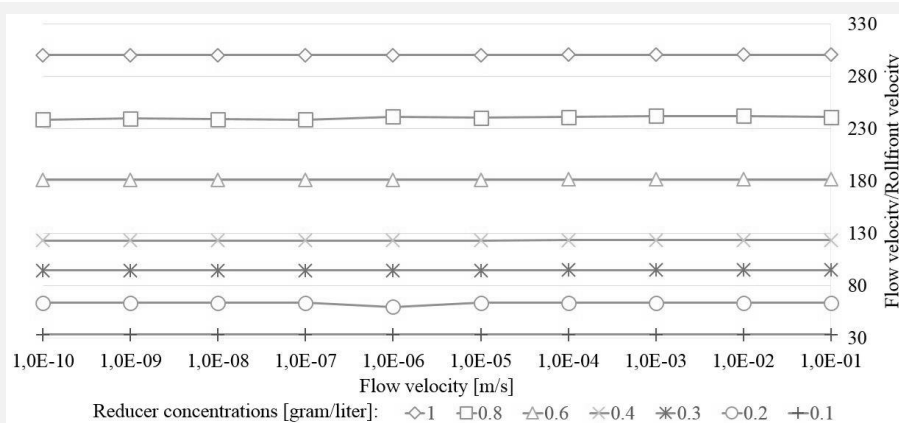


Рисунок 8. Зависимость отношения скорости фронта наката к скорости фильтрационного потока от концентрации восстановителя.

Исследование, представленное выше, было использовано для построения упрощённой модели формирования ролл-фронтных месторождений с целью получения реалистичного пространственного распределения урановой минерализации. В рамках численного моделирования

были определены константы скоростей реакций на основе имеющихся экспериментальных данных.

2. Разработка стохастического метода оценки ресурсов ролл-фронтных месторождений на основе линий тока

В настоящее время для изучения распределения содержания полезных компонентов в рудных телах типа ролл-фронт применяются стохастические методы моделирования. В данной работе предлагаются усовершенствования традиционных геостатистических алгоритмов с учётом генезиса формирования таких месторождений и гидродинамических особенностей фильтрационного потока в рудоносных слоях.

Одно из ключевых новшеств – использование времени пролёта (time of flight – TOF) водных частиц по линиям тока при расчёте вариограммы совместно с данными скважин. Такой подход заменяет традиционное использование евклидовых (физических) расстояний, что позволяет повысить точность интерполяции и оценки ресурсов.

2.1 Формирование синтетического месторождения

Единственным надёжным способом верификации геостатистических методов, определения распределения концентрации полезных компонентов в рудных телах, было бы проведение МРТ-сканирования подземных пластов, что по очевидным причинам является невозможным. Вместе с тем, одним из способов повышения точности и верификации геостатистических методов является создание синтетического месторождения с использованием модели, изложенной выше.

Процесс моделирования синтетического ролл-фронтного месторождения включает несколько этапов [18]. В первую очередь, в расчётной прямоугольной области размером $290 \times 450 \times 60$ м. (Рис. 9) формируется неоднородное распределение коэффициента фильтрации. Затем начинается непрерывная подача раствора, содержащего уран и окислитель (O_2), который реагирует с компонентами породы и выходит с противоположной стороны (выход), при этом боковые стороны считаются непроницаемыми. Подача раствора происходит до тех пор, пока концентрация урана не достигнет уровня, сопоставимого с концентрациями в реальных месторождениях (0,03 % [19]). После этого подача раствора прекращается, концентрация урана перераспределяется, осаждается и ниже по потоку формирует характерную ролл-фронтную форму. Окислительно-восстановительная модель соответствует допущениям, изложенным выше.

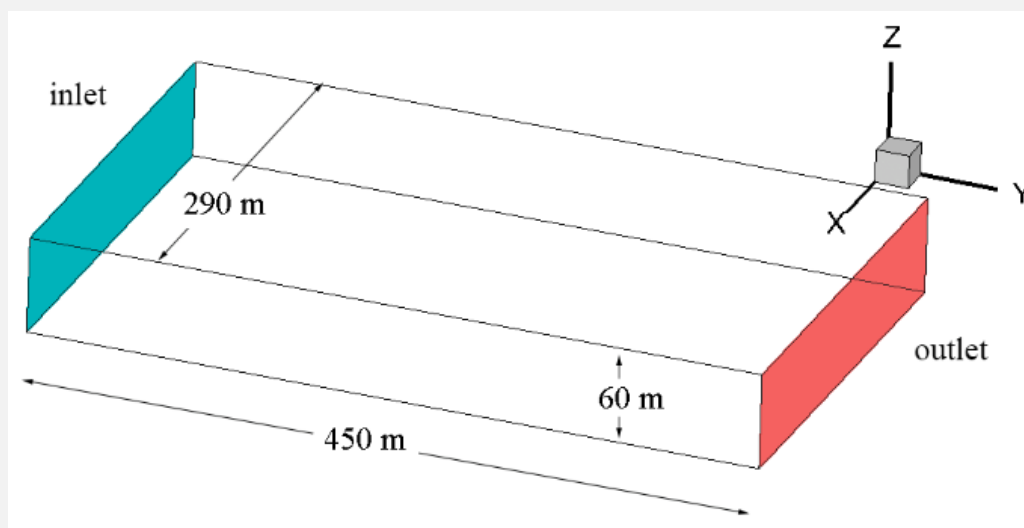


Рисунок 9. Область моделирования: зелёная граница соответствует участку притока раствора, красная – участку оттока.

За исключением восстановителя, начальные концентрации всех веществ в области моделирования были установлены равными нулю. Начальное распределение проницаемости было

установлено как идеальное и неоднородное, чтобы придать месторождению отчетливую синусоидальную форму. Условия притока и оттока определялись разностью гидравлических напоров при условии, чтобы разность высот между входом и выходом составляла 2 м. Таким образом, была сформирована трёхмерная синтетическая модель ролл-фронтального месторождения для целей верификации и сравнения геостатистических методов (Рис.10). Дополнительное моделирование проводилось на области, в которой распределение фильтрационных свойств заимствовано из данных реального месторождения на юге Казахстана.

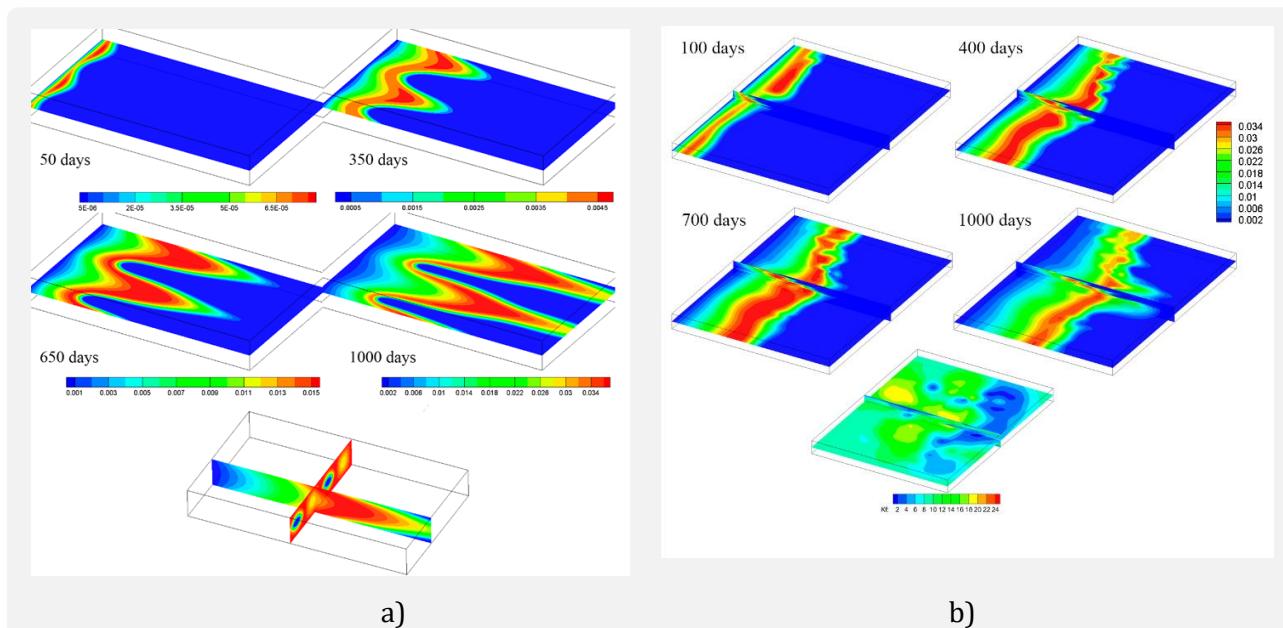


Рисунок 10. Изменение концентрации твёрдых минеральных форм урана за 1000 моделируемых дней с указанием содержания урана в процентах:
(а) при идеализированном распределении фильтрационного потока;
(б) при реальном (гетерогенном) распределении фильтрации.

2.2 Стохастический метод, основанный на линиях тока, и оценка ресурсов ролл-фронт

Цель геостатистических методов при разработке месторождений – определить пространственное распределение минералов и их содержания в межскважинном пространстве.

Геостатистика представляет собой раздел статистики, специализирующийся на анализе и интерпретации данных, обладающих пространственной (географической) привязкой. Основная задача геостатистических подходов – оценка параметров пласта, таких как коэффициент фильтрации, пористость, минеральный состав и др., в межскважинном пространстве. Расчёт осуществляется на основе известных значений, полученных в точках наблюдений (на скважинах), с учётом их вклада (веса), который зависит от расстояния до прогнозируемой точки. Обычно влияние каждого известного значения определяется в зависимости от его удалённости от точки прогноза (см. рис. 11).

В настоящей работе предлагается подход, основанный на использовании линий тока, рассчитываемых на основе векторов скорости фильтрации. Линия тока, как известно, представляет собой линию, касательная к которой в каждой её точке совпадает с вектором скорости фильтрационного потока в данный момент времени. В случае установившегося течения линия тока совпадает с траекторией движения частиц флюида.

С начала 2000-х годов линии тока получили широкое распространение в моделировании транспорта многофазных потоков в нефтегазовых резервуарах [17–20]. Однако в литературе

подчёркивается их ограниченное применение в задачах оценки минеральных ресурсов. Ключевым элементом рассматриваемого подхода является параметризация линий тока с использованием собственного параметра — времени пролёта (time of flight, TOF), которое определяется как время, необходимое частице флюида для прохождения от нагнетательной скважины (или заданной точки) через проницаемую среду вдоль линии тока.

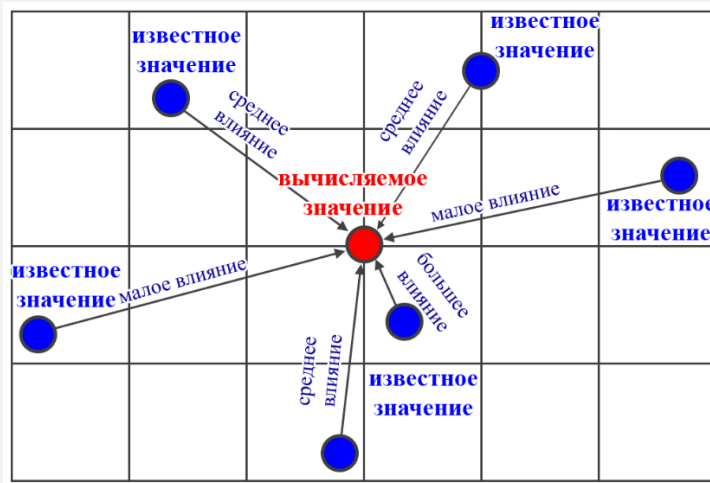


Рисунок 11. Влияние соседних точек на значение в вычисляемой точке.

В контексте оценки запасов и геомоделирования месторождений, общая формула геостатистических методов оценочного типа сводится к следующему выражению

$$Z^*(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\vec{x}_i),$$

где $Z^*(\vec{x})$ – оцененное значение искоемых параметров в точке $\vec{x}$, $Z(\vec{x}_i)$ – наблюдаемое значение в точке $\vec{x}_i$, а λ_i – веса, назначаемые соответствующим точкам на основе выбранного метода интерполяции.

Очевидно, что точность оценки существенно зависит от метода назначения весов. Так, методы обратного расстояния используют веса, определяемые на основе степени «затухания» корреляции с расстоянием, тогда как кригинговые методы предполагают аппроксимацию вариограммной функции, полученной из эмпирических данных. Вес влияния значений вычисляется по выбранной модели вариограммы, для определения статистической природой пласта. Построение вариограммы осуществляется по следующей формуле:

$$\gamma(\vec{h}) = \frac{\overline{(Z(\vec{x} + \vec{h}) - Z(\vec{x}))^2}}{2}$$

Значение функции вариограммы $\gamma(\vec{h})$ равно половине квадрату средних значений всех точек, которые находятся примерно на расстоянии $h=|\vec{h}|$ друг от друга. Выбрав несколько произвольных расстояний h и вычисляется прерывистая кривая вариограммы под которую подбирается модель.

Используя понятие ковариограммы в форме:

$$C(\vec{h}) = C(0) - \gamma(\vec{h}), C(0) = \sigma_x$$

вес λ_i каждой известной точки x_i вычисляется путем решения следующего матричного уравнения:

$$\begin{bmatrix} C(x_1 - x_1) & C(x_1 - x_2) & \dots & C(x_1 - x_n) & 1 \\ C(x_2 - x_1) & C(x_2 - x_2) & \dots & C(x_2 - x_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(x_n - x_1) & C(x_n - x_2) & \dots & C(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(x - x_1) \\ C(x - x_2) \\ \dots \\ C(x - x_n) \\ 1 \end{bmatrix}$$

В кригинге для поиска влияющих значений на скважинах используется сфера поиска, которая может принять форму эллипсоида в зависимости от анизотропии месторождения (Рис. 12).

Настоящая работа направлена на модификацию алгоритма обыкновенного кригинга с целью интеграции линий тока в качестве направляющих линий при выборе влияющих узлов и при расчёте времени пролёта, используемого для назначения весов. Иными словами, кригинг на основе линий тока представляет собой модификацию обыкновенного кригинга, реализованную в римановом (или неевклидовом) пространстве, где расстояние между точками определяется по времени пролёта вдоль линий тока, а не по евклидову (физическому) расстоянию.

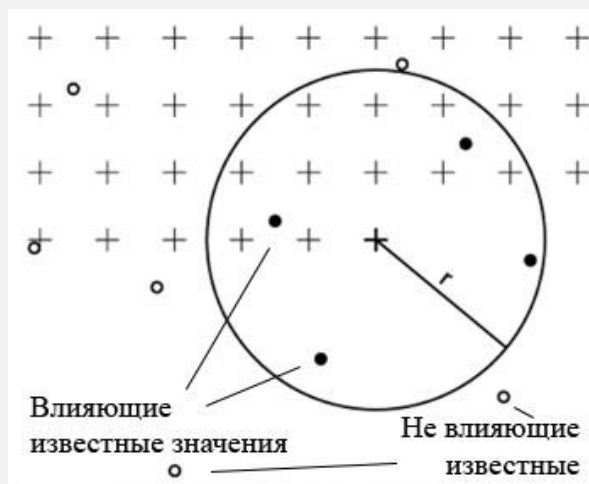


Рисунок 12. Схема поиска влияющих значений скважин в методе кригинга.

Таким образом, интерполяционный процесс кригинга, основанного на линиях тока, включает следующие основные этапы:

1. Построение линий тока в проницаемой среде на основе решения уравнений фильтрационного потока.
2. Замена евклидовых расстояний временем пролёта при формировании кригинговой матрицы.
3. Применение классического алгоритма обыкновенного кригинга с использованием времени пролёта в качестве метрики расстояния (Рис. 13).

Построение линий тока осуществляется в несколько этапов:

- (a) расчёт поля давления на основе фильтрационных свойств из уравнения (4);
- (b) вычисление поля скорости фильтрации на основе закона Дарси из уравнения (3);
- (c) построение линий тока с использованием метода Поллока [21, 22];
- (d) оценка времени пролёта вдоль полученных линий тока.

Линии тока рассчитываются по методу Поллока в два этапа: сначала для каждой жёсткой точки данных (например, каротажных измерений в скважинах), а затем – для всех узлов расчетной сетки. Для каждой линии тока последовательно вычисляется соответствующее время пролёта.

Ключевая проблема заключается в обеспечении того, чтобы линии тока действительно проходили через заданные жёсткие точки данных. Это трудно реализуемо в условиях, когда начальная точка линии тока выбирается на входной границе (на нагнетательной скважине) расчетной

области. В такой конфигурации линии тока склонны к разделению или слиянию, следуя изобразительным поверхностям, что затрудняет обеспечение их прохождения через конкретные точки наблюдений.

Для преодоления этой проблемы предложен следующий подход: начальная точка каждой линии тока выбирается непосредственно в жёсткой точке данных (вдоль ствола скважины). Далее используется обратный алгоритм трассировки линии тока – против направления течения. Полученные линии тока, пройденные в прямом и обратном направлениях, объединяются, после чего для полной траектории пересчитывается время пролёта (Рис. 13).

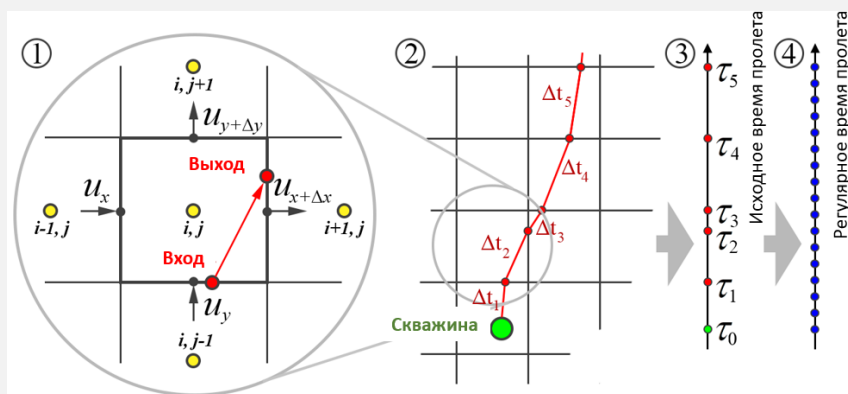


Рисунок 13. Схематическое представление метода Поллока на двумерной регулярной сетке. Линия тока входит в ячейку с индексами (i,j) при известной скорости $\vec{u}_{\xi_i} = \vec{v}_{\xi_i} \cdot \phi$.

По проекциям вектора скорости определяется минимальное время пребывания линии тока в ячейке Δt_m , а также координата выхода $\vec{\xi}_e$. Последовательно переходя от ячейки к ячейке, строится линия тока.

Аналогичная процедура может быть применена ко всем узлам исходной расчетной сетки. В зависимости от распределения поля скоростей, которое, в свою очередь, определяется полем давления (рассчитанным на основе пространственного распределения проницаемости исследуемой области), одинаковые значения времени пролёта могут наблюдаться на различных расстояниях вдоль различных линий тока.

Соединяя точки, принадлежащие разным линиям тока, но имеющие одинаковое значение времени пролёта, можно построить регулярную криволинейную ортогональную сетку, адаптированную к гидродинамическим свойствам среды (Рис. 14). Такая сетка представляет собой деформированное, неевклидово двумерное пространство, в котором метрика определяется не геометрическим расстоянием, а гидродинамически релевантным параметром – временем пролёта.

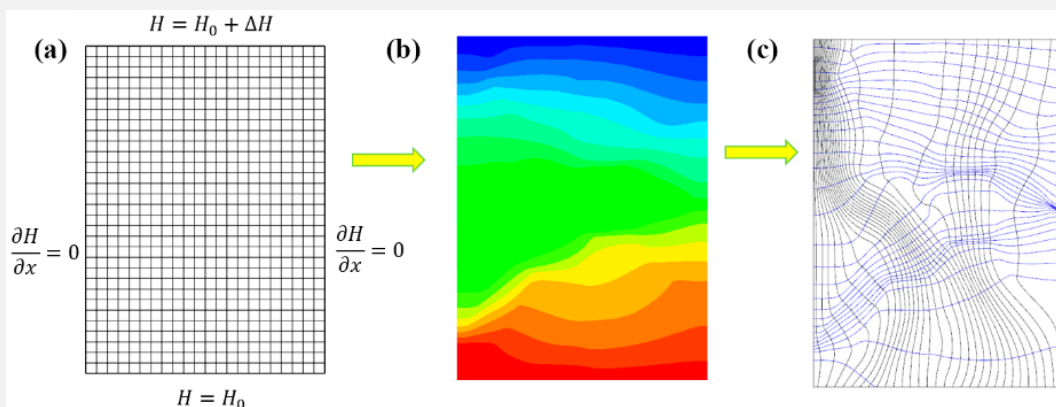


Рисунок 14. (а) Исходная традиционная расчётная сетка; (б) Распределение давления, рассчитанное на основе фильтрационных свойств; (с) Предлагаемая криволинейная сетка, сформированная по линиям тока и ортогональным к ним изоповерхностям времени пролёта.

Это неевклидово пространство далее используется для оценки вариограмм и интерполяции методом кригинга, в котором расстояния между точками заменяются разностью времени пролёта. Представленная методология может быть также обобщена на трёхмерные области, обеспечивая более реалистичное моделирование пространственного распределения свойств в неоднородных средах.

Итеративно, для каждой точки, в которой производится оценка или моделирование, формируется набор жёстких точек данных, расположенных в пределах поискового эллипсоида, форма и ориентация которого зависят от заданной анизотропии. Такая процедура повторяется для каждого узла расчетной сетки в пределах моделируемой области.

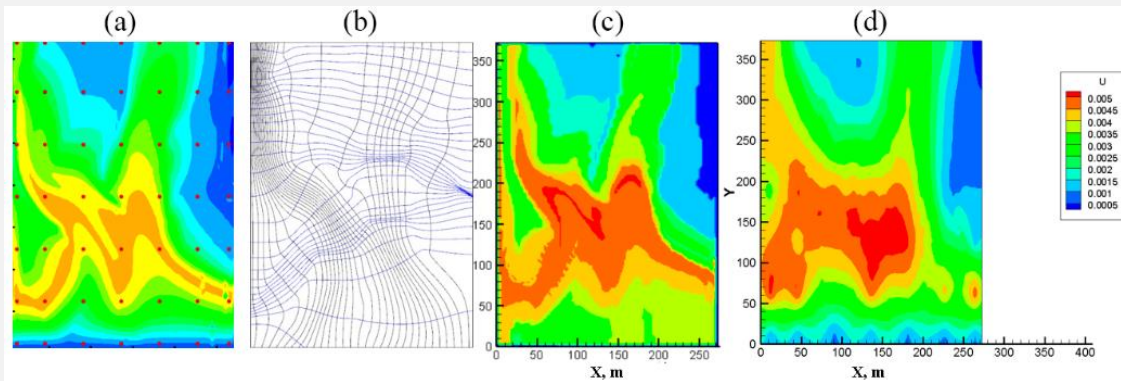


Рисунок 15. Результаты интерполяции на основе реальных фильтрационных данных: (а) синтетическая модель месторождения; (б) криволинейная сетка, построенная по линиям тока и времени пролёта; (с) интерполяция, выполненная с использованием линии тока и времени пролёта; (д) интерполяция, выполненная традиционным методом обыкновенного кригинга с использованием программного обеспечения SGeMS.

Однако в предлагаемом подходе выбор точек осуществляется не в пределах фиксированного евклидова расстояния, а с учётом разности времени пролёта и вдоль заранее рассчитанных линий тока (Рис. 15). Предполагается, что в условиях эпигенетической и гидродинамической природы формирования месторождения, наиболее значимое влияние на оценку в заданной точке оказывают точки, связанные с ней общей линией тока или находящиеся ближе к ней вдоль этой линии.

Иными словами, две точки считаются «близкими» не по геометрическим координатам, а по гидродинамической связности: если они соединены общей линией тока подземного потока, то расстояние между ними в рамках модели определяется разностью их значений времени пролёта. Такая метрика позволяет учитывать динамическую природу миграции минерализующих флюидов при геостатистической оценке.

Вариограмма рассчитывается вдоль каждой линии тока с использованием *времени пролёта* в качестве метрики расстояния вместо евклидовой дистанции. Формально она определяется следующим образом:

$$\gamma(l) = \frac{1}{N(l)} \sum_{N(l)} E[Z(\tau(\vec{x}) + l) - Z(\tau(\vec{x}))]^2,$$

где $\gamma(l)$ – значение вариограммы на расстоянии времени пролёта l ; $N(l)$ – количество пар узлов, разделённых разностью времени пролёта l ; $\tau(\vec{x})$ – значение времени пролёта для узла $\vec{x}$ вдоль соответствующей линии тока; $Z(\tau)$ – содержание (концентрация) на данной позиции вдоль линии тока.

Веса λ_i назначаются для каждого жёсткого узла данных, расположенного вдоль линии тока. В стационарном случае они определяются через коррелограмму $C(l) = \sigma^2 - \gamma(l)$, где σ^2 – дисперсия:

$$\lambda_i = \frac{C(\tau(\vec{x}_i))}{\sum_{j=1}^n C(\tau(\vec{x}_j))}.$$

Альтернативно, веса могут быть получены путём решения системы кригинга в скользящих окрестностях (moving neighborhood), что также позволяет вычислить оценочную дисперсию для каждой интерполируемой точки.

Для тестирования предлагаемого метода была использована ранее созданная синтетическая модель ролл-фронтального месторождения, в которой пробурен набор скважин. Вдоль каждой скважины собраны жёсткие данные (например, содержание урана), использованные в качестве входной информации для построения модели. Истинное распределение содержания в пределах модельного рудного тела применяется для оценки точности интерполяции и анализа погрешности метода.

Поле давления, поле фильтрационных скоростей и соответствующие линии тока были рассчитаны на основе гидродинамических параметров пласта, имеющего типичную мощность (толщину) около 40 метров. Интерполяция содержания по скважинным данным, выполненная с использованием предлагаемого подхода на основе линий тока, была сопоставлена с результатами классического обыкновенного кригинга, реализованного в программном обеспечении SGeMS. Сравнение распределений приведено на Рисунке 15.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Оценка ресурсов урана производится на основе следующей формулы:

$$M = \sum_i \frac{C_i}{100} \rho V_i (1 - \phi)$$

где M – общие ресурсы (в кг), C_i – концентрация урана в ячейке i (в %), ρ – плотность среды, принятая равной 1700 кг/м^3 , ϕ – пористость, V – объем ячейки i .

На Рисунке 16 представлено сравнение оценок ресурсов, полученных с использованием классического метода обыкновенного кригинга и предложенного стохастического метода на основе линий тока [23]. Были проведены два типа оценок:

1. Общие ресурсы – включают все ячейки модели, независимо от уровня содержания урана.
2. Балансовые ресурсы – учитывают только те ячейки, в которых концентрация урана превышает экономически обоснованный порог, принятый равным $0,03\%$.

Выделение балансовых ресурсов обусловлено тем, что основное накопление урана при ролл-фронтальном типе оруднения происходит вдоль фронта окисления. В то же время зоны с низкими концентрациями урана (забалансовая руда) часто считаются нерентабельными для извлечения и исключаются из расчётов [8].

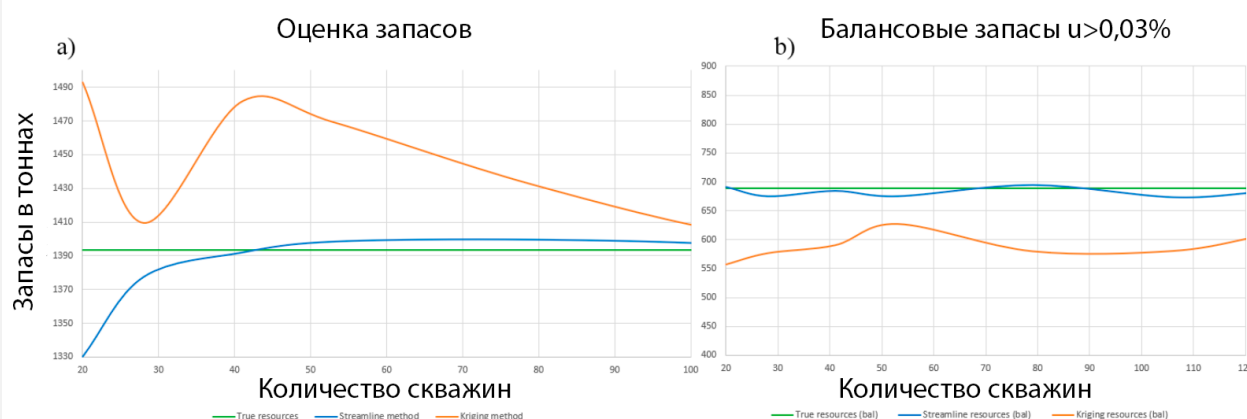
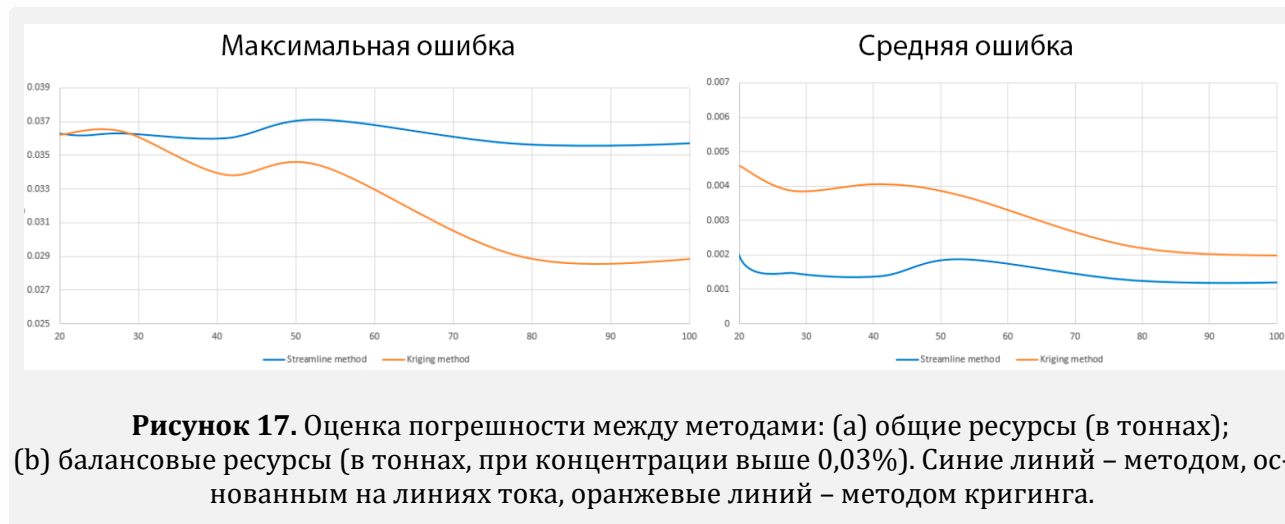


Рисунок 16. Сравнение оценки ресурсов между стохастическим методом, основанным на линиях тока (синие линии), и обыкновенным кригингом (оранжевые линии): (а) общие ресурсы in-situ (в тоннах) по всем ячейкам; (б) извлекаемые (балансовые) ресурсы (в тоннах) с концентрацией выше $0,03\%$.

По результатам моделирования, общие ресурсы в рассматриваемой области составили около 1400 тонн урана (или UO_2), из которых менее 700 тонн соответствуют балансовым критериям. При этом:

- в оценке **общих ресурсов** метод кригинга показал **значительную переоценку** запасов;
- в оценке **балансовых ресурсов** – напротив, наблюдалась **недооценка** минерального содержания.



В обоих случаях предложенный метод, основанный на линии тока и времени пролёта, продемонстрировал более высокую точность оценки.

Для качественного анализа была дополнительно проведена оценка погрешности, представляемая на Рисунке 17.

Анализ результатов на Рисунках 16 и 17 демонстрирует, что интерполяция, основанная на линиях тока, обеспечивает качественно лучшие результаты по сравнению с обыкновенным кригингом. Предложенный метод позволяет более точно воспроизводить характерную ролл-фронтную структуру рудного тела благодаря учёту гидродинамических связей между точками.

Кроме того, количественный анализ показывает, что при увеличении числа скважин погрешность метода, основанного на линиях тока, резко снижается. При этом метод демонстрирует более высокую точность даже при ограниченном количестве разведочных данных, что делает его особенно перспективным для ранних этапов геологоразведки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на высокую степень сглаживания, присущую методу обыкновенного кригинга, результаты проведённого исследования показывают, что интерполяция, основанная на линиях тока, обеспечивает более высокую точность в области геохимического фронта (барьера) – ключевой зоны накопления урана в роллфронтных месторождениях. Как видно из Рисунков 16 и 17, при ограничении оценки только узлами с промышленно значимой концентрацией урана (балансовыми ресурсами), метод, основанный на линиях тока, демонстрирует ещё более высокую точность в сравнении с классическим кригингом.

Одним из ограничений предлагаемого подхода является необходимость наличия достаточно полного набора исходных данных о гидродинамических и геологических свойствах месторождения – таких как формации, проницаемость, литологические границы. Это необходимо для построения достоверной модели фильтрационного потока и корректного расчёта линий тока.

В то же время, ключевым преимуществом метода является его универсальность: концепция замены евклидовых расстояний на время пролёта вдоль линий тока может быть применена и к другим геостатистическим подходам, помимо кригинга — таким как стохастическое моделирование (SGS), мультигауссовы модели, модели на основе поворотных полос и др.

Проведённое исследование состояло из двух основных этапов:

1. Моделирование формирования ролл-фронтального месторождения с использованием модели реактивного транспорта, что позволило сгенерировать синтетические распределения урана в условиях, приближенных к реальным.

2. Разработка и тестирование нового геостатистического метода – кригинга на основе линий тока, учитывающего гидродинамическую природу формирования урановых ролл-фронтальных месторождений.

Для верификации метода были использованы различные геометрии вмещающих пород и вариации доступных жёстких данных (каротаж скважин). Результаты показали, что по сравнению с традиционным обыкновенным кригингом, предложенный подход обеспечивает более точную оценку ресурсов, характеризующуюся меньшей средней погрешностью. Особенно это проявляется при ограниченном количестве скважин, что критично на ранних этапах геолого-разведки.

Метод особенно перспективен для применения в эпигенетических месторождениях, сформировавшихся в результате инфильтрационных процессов. Использование вариограмм, построенных вдоль линий тока, позволяет более точно учитывать пространственные зависимости при назначении весов, повышая надёжность оценки.

Кроме того, предлагаемая концепция может быть адаптирована к другим геостатистическим методам, позволяя учитывать влияние фильтрационных потоков и транспортных процессов при построении пространственных моделей месторождений.

Перспективы дальнейших исследований

Будущие работы должны быть направлены на:

- верификацию предложенного метода на реальных месторождениях;
- адаптацию других стохастических и детерминированных геостатистических методов для использования неевклидовой метрики, основанной на моделировании фильтрационного потока;
- развитие инструментария геостатистического моделирования с применением метрик, выведенных из решений задач транспорта и фильтрации.

Предложенный подход открывает новые возможности для повышения точности оценки ресурсов в сложных геологических и гидродинамических условиях, закладывая основу для применения геостатистики в неевклидовых пространствах.

Вклад авторов. А.Қалтаев – постановка задачи, участие в построении моделей, обсуждение промежуточных и заключительных результатов, Д.Айжулов – построение моделей задачи, выбор численных методов решения и проведение численных расчетов, анализ результатов и формулирование выводов, М.Құрмансейт – участие в построении линии тока методом Поллока, участие в численной реализации.

Информация о финансировании. Исследования проводились в рамках программы фундаментальных исследований Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (номер гранта: BR20280990).

ЛИТЕРАТУРА

1. World Nuclear Association. Uranium and Nuclear Power in Kazakhstan. – London: World Nuclear Association, 2024. – 44 p.
2. Boytsov, A. Sustainable development of uranium production: status, prospects, challenges // International symposium on uranium raw material for the nuclear fuel cycle: exploration, mining, production, supply and demand, economics and environmental issues (URAM-2018). – Vienna: IAEA, 2018. – P. 49-50.
3. Boytsov A.V. World uranium industry: state, development prospects, challenges of the time // Proceedings of VIII International Research and Practical Conference “The topical issues of the uranium industry”. – Astana, 2017. – P. 14-21.
4. OECD, NEA, IAEA. Uranium 2014: Resources, Production and Demand. – Paris: OECD Publishing, 2014. – 508 p.

5. Tarkhanov A.V., Bugriyeva E.P. The largest uranium deposits in the world / Edited by G.A. Mashkovtseva. – M.: VIMS, 2012. – 118 p.
6. World Distribution of Uranium Deposits (UDEPO) with Uranium Deposit Classification, IAEA-TECDOC-1629, International Atomic Energy Agency, Printed by the IAEA in Austria October 2009, p. 117. ISBN 978–92–0–110509–7
7. Adams, S.S.; Cramer, R.T. Data-process-criteria model for roll-type uranium deposits. *Geol. Environ. Sandstone-Type Uranium Depos.* **1985**, 16, 383–399.
8. Dahlkamp, F.J. *Uranium Deposits of the World (Asia)*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2009; p. 492.
9. Dahlkamp F.J. *Uranium Ore Deposits*. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 460 p.
10. Abzalov, M.; Drobov, S.; Gorbatenko, O.; Vershkov, A.; Bertoli, O.; Renard, D.; Beucher, H. Resource estimation of in situ leach uranium projects. *Appl. Earth Sci.* **2014**, 123, 70–85.
12. Maksimova, M.F.; Shmariovich, Y.M. *Plastovo-Infiltratsionnoye Rudoobrazovanie [Stratum-Infiltration ore Formation]*; Nedra: Moscow, Russia, 1993; p. 160.
13. Beletskiy V.I., Bogatkov L.K., Volkov N.I., Glazunov I.S., Dolgih P.F. *Handbook of Uranium Geotechnology*. – M.: Energoatomizdat, 1997. – 672 p.
14. Boytsov V.E., Vercheba A.A. *Geological and industrial types of uranium deposits: textbook*. – M.: KDU, 2008. – 310 p.
15. Romberger S. B. Transport and deposition of uranium in hydrothermal systems at temperatures up to 300C: geological implications // *Uranium geochemistry, mineralogy, geology, exploration and resources*. – 1984. – P. 12-17. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-6060-2>.
16. L. S. Evseeva, K. E. Ivanov, V. I. Kochetkov. Some laws of the formation of epigenetic uranium ores in sandstones, derived from experimental and radiochemical data. *Atomnaya Energiya* 14 (1962) 474-481.
17. Aizhulov, D.; Shyakhmetov, N.M.; Kaltayev, A. Quantitative model of the formation mechanism of the roll-front uranium deposits. *Eurasian Chem.-Technol. J.* 2018, 3, 213–221
18. Brovin K.G., Grabovnikov V.A., Shumilin M.V., Yazikov V.G. *Forecast, prospecting, exploration and industrial evaluation of uranium deposits for mining by underground leaching*. – Almaty: Gylym, 1997. – 384 p.
19. Aizhulov D., Tungatarova M. and Kaltayev A. Streamlines Based Stochastic Methods and Reactive Transport Simulation Applied to Resource Estimation of Roll-Front Uranium Deposits Exploited by In-Situ Leaching. *Minerals* **2022**, 12, 1209. <https://doi.org/10.3390/min12101209>.
20. Poezshaev I.P., Panova E.N., Bulenova K.Zh., Karmanov E.M., Blynsky O.A., Bitov O.A. *Geotechnology of uranium*. – Almaty: NAC Kazatomprom, 2017. – 319 p.
21. Pollock, D.W. Semi-analytical Computation of Path Line for Finite Difference Models. *Ground Water* **1988**, 26, 743–750. [[CrossRef](#)]
22. Kuljabekov, A. *Model of Chemical Leaching with Gypsum Sedimentation in Porous Media*. Ph.D. Thesis, University of Lorraine, Nancy, France, Al Farabi Almaty, Kazakhstan, 18 December 2014.
23. Aizhulov, D.; Tungatarova, M.; Kaltayev, A. Streamlines Based Stochastic Methods and Reactive Transport Simulation Applied to Resource Estimation of Roll-Front Uranium Deposits Exploited by In-Situ Leaching. *Minerals* **2022**, 12, 1209.