ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ПРЕЗИДЕНТІНІҢ ЖАНЫНДАҒЫ
ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ
АКАДЕМИЯСЫ

**№3** (июль-сентябрь)
2026 год

# НАУКА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Научный журнал НАН РК при Президенте РК



ҚР Президентінің жанындағы ҚР ҰҒА
**«Интеллектуалды жүйелер ғылымы»** ғылыми журналы

Scientific Journal of the NAS RK under the President of the RK
**«Science of intelligent systems»**

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ПРЕЗИДЕНТІНІҢ ЖАНЫНДАҒЫ
ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ
АКАДЕМИЯСЫ

**№3** (июль-сентябрь)
2026 год

# «Интеллектуалды жүйелер ғылымы» ғылыми журнал

# Научный журнал «Наука интеллектуальных систем»

# Scientific Journal «Science of intelligent systems»

**БАС РЕДАКТОР:**

**Тоқбергенов И.Т.**
физика-математика ғылымдарының кандидаты, ҚР Президентінің жанындағы ҚР ҰҒА Бас ғалым хатшысы

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:**

**Токбергенов И.Т.,**
кандидат физико-математических наук, Главный ученый секретарь НАН РК при Президенте РК

**CHIEF EDITOR:**

**I.Tokbergenov**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Scientific Secretary of the National Academy of Science of the Republic of Kazakhstan under the President of the Republic of Kazakhstan

**РЕДАКЦИЯЛЫҚ АЛҚА МҮШЕЛЕРІ:**

**Бакенов Ж.Б.,** академик (Қазақстан);

**Батырбеков Э.Г.,** академик (Қазақстан);

**Қалтаев А.Ж.,** академик (Қазақстан);

**Локшин В.Н.,** академик (Казахстан);

**Миталипов Ш.,** профессор (АҚШ);

**Сұраған Дурвудхан,** академик (Қазақстан);

**Телтаев Б.Б.,** академик (Қазақстан);

**Чэнь Си,** профессор (ҚХР);

**Шеремет И. А.,** академик (Ресей).

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:**

**Бакенов Ж.Б.,** академик (Казахстан);

**Батырбеков Э.Г.,** академик (Казахстан);

**Калтаев А. Ж.,** академик (Казахстан);

**Локшин В.Н.,** академик (Казахстан);

**Миталипов Ш.,** профессор (США);

**Сураган Дурвудхан,** академик (Казахстан);

**Телтаев Б.Б.,** академик (Казахстан);

**Чэнь Си,** профессор (КНР);

**Шеремет И.А.,** академик РАН (Россия).

**MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:**

**Bakenov J.B** Academic (Kazakhstan);

**Batyrbekov E.G.,** Academic (Kazakhstan);

**Kaltaev A. J.,** Academic (Kazakhstan);

**Lokshin V.N.,** Academic (Kazakhstan);

**Mitalipov Sh.,** Professor (USA);

**Suragan Durvudhan,** Academic (Kazakhstan);

**Teltaev B.B.,** Academic (Kazakhstan);

**Chen Xi,** Professor (China);

**Sheremet I. A.,** Academic (Russia).

**УЧРЕДИТЕЛЬ:**
Национальная академия наук Республики Казахстан при Президенте Республики Казахстан
**Издается с 2025 года**
**Выходит 4 раза в год, ежеквартально**
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания № KZ90VPY00113742, выданное Министерством культуры и информации от 03.03.2025 г.
**Адрес редакции:** 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28
**Тел. канцелярии:** +7 (727) 308 08 17
**Тел. отв. редактора:** +7 705 988 19 52
**Сайт журнала:** https://kazscience.kz

**FOUNDER:**
National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan under the President of the Republic of Kazakhstan
**Published since 2025 year.**
**Issued 4 times a year, quarterly**
Certificate of registration of a periodical, news agency and online publication No. KZ90VPY00113742 issued by the Ministry of Culture and Information dated 03.03.2025.
**Address of editorial offices:** 050010, Almaty city, Shevchenko str., 28
**Office phone number:** +7 (727) 308 08 17
**Tel. of the responsible editor:** +7 705 988 19 52
**Website:** https://kazscience.kz

# СОДЕРЖАНИЕ

**А.К. Куришбаев.** Выступление на открытии VI Международной конференции I-CRAFT 2026 ..... **4**

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ**

**А.Э. Ким.** Метод параметризации и физически информированные нейронные сети для уравнения Дуффинга ..... **7**

**Б. Азибек, С. Буганова, А. Курмаш, Н. Жакиев.** Обучение с подкреплением для стратегических торгов на рынке «На сутки вперёд» ..... **17**

**А. Калтаев, М. Курмансейт.** Реактивно-транспортная модель бактериально-химического выщелачивания пирита в пористой среде с учётом роста и прикрепления бактерий ..... **32**

**М. Кунелбаев, А. Рахыш.** Расчётная оценка коммуникационных ограничений событийной системы видеомониторинга на базе ESP32-CAM и FPGA ..... **51**

**ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ**

**Ф.Р. Мирзаев, Г.Х. Джафарова.** Искусственный интеллект в цифровом сохранении гянджа-газахско-карабахских диалектов ..... **68**

**Н. Мейрамбекулы, К. Саурова, К. Алипбаев, А.К. Ханиева, Б.А. Ханиев.** Цифровое моделирование и анализ характеристик звездного датчика для малых космических аппаратов ..... **77**

# CONTENT

**Kurishbaev A.K.** Speech at the opening of the VI International Conference I-CRAFT 2026 ..... **4**

**INTELLIGENT SYSTEMS**

**Kim A.E.** Parametrization method and physics-informed neural networks for the Duffing equation ..... **7**

**Azibek B., Buganova S., Kurmash A., Kulmanov A., Zhakiyev N.** Reinforcement learning for strategic bidding in day-ahead electricity market ..... **17**

**Kaltayev A., Kurmanseit M.** Reactive transport model of bacterial–chemical leaching of pyrite in a porous medium accounting for bacterial growth and attachment ..... **32**

**Kunelbayev M., Rakhysh A.** Calculation-based assessment of communication constraints in an event-driven video monitoring system based on ESP32-CAM and FPGA ..... **51**

**ARTIFICIAL INTELLIGENCE**

**Mirzayev F.R., Jafarova G.K.** Artificial intelligence for the digital preservation of Ganja-Gazakh-Karabakh dialects ..... **68**

**Meirambekuly N., Saurova K., Alipbayev K., Khaniyeva A., Khaniyev B.** Digital modeling and performance analysis of a star tracker for small spacecraft ..... **77**



**Выступление Президента Национальной академии наук Республики Казахстан при Президенте Республики Казахстан академика Куришбаева А.К. на открытии VI Международной конференции I-CRAFT 2026**

Сегодня продовольственная безопасность приобретает новое содержание. В мире по-прежнему сотни миллионов людей сталкиваются с голодом, а миллиарды не имеют устойчивого доступа к полноценному и здоровому питанию. Одновременно растет население, меняется климат, сокращается доступность воды, усиливается деградация почв и возрастает нагрузка на экосистемы.

Поэтому задача уже не сводится к простому увеличению объемов производства. Необходимо производить больше и качественнее, используя меньше воды, энергии, удобрений и других ресурсов. При этом нужно сохранять плодородие почв, биоразнообразие и устойчивость природных систем. Именно способность совместить продуктивность, ресурсосбережение и качество продовольствия становится главным критерием эффективности аграрной науки.

Казахстан обладает значительным аграрным потенциалом. Ежегодная посевная площадь страны превышает 23 миллиона гектаров. Наши зерновые, масличные культуры и продукция животноводства востребованы внутри страны и за ее пределами. Казахстан способен вносить еще больший вклад в региональную продовольственную безопасность.

Вместе с тем аграрное производство в нашей стране развивается в сложных природно-климатических условиях. Засухи, дефицит влаги, засоление и деградация почв, снижение продуктивности пастбищ, неустойчивость кормовой базы, трансграничный характер водных ресурсов и значительные различия между регионами непосредственно влияют на устойчивость производства. В этих условиях Казахстан является не только территорией повышенных климатических рисков, но и масштабной естественной лабораторией для разработки и проверки технологий устойчивого сельского хозяйства.

Для ответа на эти вызовы необходима системная трансформация аграрной науки. Я хотел бы выделить четыре взаимосвязанных направления.

**Первое — селекция нового поколения и устойчивость системы семеноводства.** Необходимо перейти от оценки сорта преимущественно по урожайности к формированию его целевой модели. Новый сорт должен быть устойчив к засухе, жаре, засолению, болезням и вредителям, эффективно использовать воду и соответствовать требованиям хранения и глубокой переработки.

Для этого необходимо объединить современные методы геномики, цифрового фенотипирования, климатического моделирования и искусственного интеллекта с испытаниями в реальных почвенно-климатических условиях. Одновременно следует обеспечить полный цикл — от создания сорта и сохранения его генетической чистоты до производства достаточного объема качественных семян и их внедрения в сельскохозяйственное производство.

**Второе направление — устойчивое животноводство.** Здесь необходимы геномная

селекция и сохранение генетических ресурсов сельскохозяйственных животных, повышение их продуктивности и репродуктивного потенциала, развитие устойчивой кормовой базы и обеспечение ветеринарно-биологической безопасности. Цифровая идентификация, сенсоры и искусственный интеллект позволяют индивидуально контролировать здоровье, питание и продуктивность животных, раньше выявлять заболевания и рациональнее применять ветеринарные препараты. Отдельными задачами являются восстановление пастбищ, снижение выбросов метана и создание пород, адаптированных к климату и условиям регионов Казахстана.

**Третье направление — управление водой, почвой и агроландшафтами.** Водная обеспеченность все сильнее определяет не только урожайность отдельных культур, но и структуру сельскохозяйственного производства. Решения о размещении посевов, выборе технологий орошения и применении удобрений должны основываться на объективной оценке водного баланса, состояния почв и климатических рисков.

Современные средства дистанционного зондирования Земли, наземные сенсоры, беспилотные аппараты, геоинформационные системы и модели позволяют видеть ситуацию практически в реальном времени. Но сами по себе данные еще не являются решением. Их необходимо преобразовать в прогноз, сценарий и конкретную рекомендацию для исследователя, агронома, фермера и государственного органа.

Национальная академия наук совместно с казахстанскими и зарубежными партнерами развивает научно-технологическую платформу DeepBas. Она призвана объединять спутниковые и наземные наблюдения, климатические, гидрологические и агрономические модели, а также инструменты искусственного интеллекта. Такой подход позволит прогнозировать засухи и дефицит влаги, оценивать состояние посевов и пастбищ, прогнозировать кормовую обеспеченность, рассчитывать потребность в воде и проверять различные сценарии до принятия дорогостоящих решений.

**Четвертое направление — глубокая переработка и качество продовольствия.** Потенциал сельского хозяйства не должен оцениваться только объемом произведенного сырья. Значительная часть добавленной стоимости формируется на стадиях хранения, переработки, обеспечения качества и создания новых продуктов.

Новые технологии замораживания и сушки, экологичные методы экстракции, функциональные пищевые продукты, биополимерные материалы, использование побочных продуктов и сокращение потерь способны одновременно повысить конкурентоспособность агропромышленного комплекса и снизить нагрузку на окружающую среду. Поэтому селекция, производство и переработка должны быть связаны единой научно-технологической логикой. Уже на этапе создания сорта или породы необходимо понимать, для какого конечного продукта и технологического процесса они предназначены.

Объединяющим контуром этих преобразований становится искусственный интеллект. Его значение заключается не только в автоматизации отдельных операций. Искусственный интеллект позволяет связать данные разных уровней — от генома растения и животного, состава почвы и кормов, состояния посевов и пастбищ до производственного процесса, качества продукции и потребительского спроса.

Национальная академия наук продвигает инициативу **Qazaqstan AI for Science**, основанную на новой модели организации исследований. Человек определяет научную задачу, ограничения и критерии. Ученый совместно с искусственным интеллектом формирует гипотезы и модели. Затем они проходят вычислительную, лабораторную и полевую проверку, независимую валидацию и

только после этого могут быть рекомендованы для практического применения.

Принципиально важно, чтобы цифровизация не сводилась к созданию еще одной информационной системы. Нам необходима научная среда, в которой прослеживается происхождение данных, фиксируются параметры моделей, оценивается неопределенность результатов и обеспечивается их воспроизводимость. Только при таких условиях искусственный интеллект становится надежным инструментом науки и производства.

Решить столь комплексные задачи невозможно силами одной организации или одной страны. Нам нужны устойчивые консорциумы, объединяющие генетиков, селекционеров, агрономов, зоотехников, ветеринарных специалистов, экспертов по воде, почвам и кормам, инженеров, технологов пищевой промышленности, математиков, разработчиков искусственного интеллекта и представителей бизнеса.

Роль Национальной академии наук мы видим в определении долгосрочных научно-технологических задач, объединении междисциплинарных команд, формировании международных партнерств, разработке требований к качеству исследований и независимой оценке полученных результатов. При этом университеты и научные институты должны сохранять свою специализацию, а производственный сектор — участвовать в постановке задач, испытаниях и внедрении технологий.

Считаю целесообразным, чтобы одним из практических результатов I-CRAFT 2026 стало формирование Алматинской исследовательской повестки по устойчивым агропродовольственным технологиям.

*В ее рамках можно определить совместные проекты по четырем направлениям:*

1) климатически устойчивая селекция и семеноводство;

2) генетика, кормовая база и ветеринарно-биологическая безопасность животноводства;

3) водосберегающее земледелие и интеллектуальное управление агроландшафтами;

4) глубокая переработка, функциональное питание и сокращение потерь продовольствия.

Для каждого направления важно сформировать международную проектную команду, определить экспериментальные площадки, согласовать протоколы и данные, а также подготовить предложения по совместному финансированию. Отдельный блок должен быть посвящен мобильности молодых ученых, совместной подготовке докторантов и работе исследователей на общей лабораторной и полевой инфраструктуре.

Результативность этой конференции не должна измеряться только количеством докладов и публикаций. Ее главным результатом должны стать совместные исследования, технологии, прошедшие апробацию на практике, а также решения, отвечающие потребностям производства и общества.

Казахстан готов предложить для совместной работы свой научный потенциал, разнообразные природно-климатические зоны, экспериментальные площадки и возможности для международного сотрудничества. Уверен, что I-CRAFT 2026 станет отправной точкой для создания новых консорциумов и реализации долгосрочных проектов, способствующих укреплению продовольственной безопасности наших стран.

**UDC 519.62; 004.032.26**
**IRSTI 27.41.19; 28.23.15**
**DOI: https://doi.org/10.66941/3106-9037/2026/iss3pp7-16**

**Kim A.E.**
*International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*

## PARAMETRIZATION METHOD AND PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS FOR THE DUFFING EQUATION

**Kim Andrey Edikovich,** Master of Technical Sciences, Assistant Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling, International Information Technology University, 34/1 Manas St., Almaty 050040, Kazakhstan.
E-mail: kandreym@icloud.com; https://doi.org/: 0009-0006-3369-7694

**Abstract**. *Introduction.* Physics-informed neural networks (PINNs) are increasingly proposed as universal solvers of differential equations, but their reliability for nonlinear oscillators with several periodic solutions is insufficiently studied. *Aims and objectives.* To compare D.S. Dzhumabaev's parametrization method with PINNs for periodic solutions of the Duffing equation in terms of accuracy, cost, robustness and control over coexisting solutions. *Results.* The parametrization method reached errors of $10^{-8}$-$10^{-7}$ in hundredths of a second; eight subintervals raised the share of convergent initial approximations under strong softening nonlinearity from 0-9% to 61-100%; with arclength continuation and Floquet multipliers, the method reproduced the full hysteresis of the frequency response. PINNs reached errors of $10^{-6}$-$10^{-2}$ in 20-40 s and in some regimes converged, with an equally small loss, to a different periodic solution. *Conclusion.* PINN solutions require verification, which the parametrization method provides.

**Keywords:** Duffing equation, periodic boundary value problem, parametrization method, physics-informed neural networks, Newton's method, frequency response.

**А.Э. Ким**
*Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*

## МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ И ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

**Ким Андрей Эдикович,** магистр технических наук, ассистент-профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Международный университет информационных технологий, ул. Манаса, 34/1, Алматы 050040, Казахстан.
E-mail: kandreym@icloud.com; https://doi.org/: 0009-0006-3369-7694

**Аннотация.** *Вступление.* Физически информированные нейронные сети (PINN) все чаще предлагаются как универсальные решатели дифференциальных уравнений, однако их надежность для нелинейных осцилляторов с несколькими периодическими решениями изучена недостаточно. *Цели и задачи.* Сравнить метод параметризации Д.С. Джумабаева с PINN при нахождении периодических решений уравнения Дуффинга по точности, затратам, устойчивости и контролю над сосуществующими решениями. *Результаты.* Метод параметризации достиг погрешности $10^{-8}$-$10^{-7}$ за сотые доли секунды; разбиение на восемь частей при сильной мягкой нелинейности повысило долю сходящихся начальных приближений с 0-9% до 61-100%; в сочетании с продолжением по длине дуги и мультипликаторами Флоке метод воспроизвел полный гистерезис амплитудно-частотной характеристики. PINN достигли погрешности $10^{-6}$-$10^{-2}$ за 20-40 с и в ряде режимов сходились к другому периодическому решению при столь же малой функции потерь. *Заключение.* Решения PINN нуждаются в верификации, которую обеспечивает метод параметризации.

**Ключевые слова:** уравнение Дуффинга, периодическая краевая задача, метод параметризации, физически информированные нейронные сети, метод Ньютона, амплитудно-частотная характеристика.

**А.Э. Ким**
*Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан*

# ДУФФИНГ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІ ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ АҚПАРАТТАНДЫРЫЛҒАН НЕЙРОНДЫҚ ЖЕЛІЛЕР

**Ким Андрей Эдикович,** техника ғылымдарының магистрі, Халықаралық ақпараттық технологиялар университетінің математикалық және компьютерлік модельдеу кафедрасының ассистент-профессоры, Манас к-сі, 34/1, Алматы 050040, Қазақстан.
E-mail: kandreym@icloud.com; https://doi.org/: 0009-0006-3369-7694

**Аннотация.** *Кіріспе.* Физикалық ақпараттандырылған нейрондық желілер (PINN) дифференциалдық теңдеулерді шешудің әмбебап құралы ретінде жиі ұсынылады, алайда бірнеше периодты шешімі бар сызықтық емес осцилляторлар үшін олардың сенімділігі жеткілікті зерттелмеген. *Мақсаты мен міндеттері.* Дуффинг теңдеуінің периодты шешімдерін табуда Д.С. Жұмабаевтың параметрлеу әдісін PINN-мен дәлдік, есептеу шығын, орнықтылық және қатар өмір сүретін шешімдерді бақылау тұрғысынан салыстыру. *Нәтижелер.* Параметрлеу әдісі секундтың жүзден бір бөлігінде $10^{-8}$-$10^{-7}$ қателікке жетті; күшті жұмсарушы сызықты емес жағдайда сегіз бөлікке бөлу жинақталатын бастапқы жуықтаулар үлесін 0-9%-дан 61-100%-ға дейін арттырды; доға ұзындығы бойынша жалғастыру және Флоке мультипликаторларымен бірге әдіс амплитудалық-жиіліктік сипаттаманың толық гистерезисін қалпына келтірілді. PINN 20-40 секундта $10^{-6}$-$10^{-2}$ қателікке жетті және кейбір режимдерде шығын функциясы дәл сондай кіші болғанымен басқа периодты шешімге жинақталды. *Қорытынды.* PINN шешімдері тексеруді қажет етеді, оны параметрлеу әдісі қамтамасыз етеді.

**Түйін сөздер:** дуффинг теңдеуі, периодты шеттік есеп, параметрлеу әдісі, физикалық ақпараттандырылған нейрондық желілер, Ньютон әдісі, амплитудалық-жиіліктік сипаттама.

**For citation:** Kim A.E. (2026). Parametrization method and physics-informed neural networks for the Duffing equation. *Science of Intelligent Systems*, [Vol.(No.)], [pages]. (In Eng.). https://doi.org/[to be assigned]

## Introduction

The Duffing equation, introduced to describe forced oscillations with a nonlinear restoring force (Duffing, 1918), is a standard model of nonlinear vibrations of beams, pendulums and electrical circuits. It exhibits jump resonance, coexistence of several periodic regimes and chaos (Holmes, 1979; Ueda, 1979; Guckenheimer, Holmes, 1983; Kovacic, Brennan, 2011). Steady-state vibrations correspond to periodic solutions, and computing them requires solving a nonlinear boundary value problem in which the state at the end of the period coincides with the state at its beginning. Such a problem may have several solutions, and its numerical solution is sensitive to the initial approximation (Keller, 1968; Ascher et al., 1995).

Numerical methods for boundary value problems for ordinary differential equations include shooting, multiple shooting, finite-difference and collocation methods (Keller, 1968; Ascher et al., 1995; Stoer, Bulirsch, 2002). Shooting is simple but sensitive to the growth of solutions of the Cauchy problem; multiple shooting limits this growth by splitting the interval; adaptive collocation controls the residual and refines the mesh automatically (Kierzenka, Shampine, 2001). For periodic regimes of oscillators, path-following methods trace branches of solutions and detect folds and bifurcations (Keller, 1977; Allgower, Georg, 2003), while harmonic balance provides analytical approximations of the frequency response (Nayfeh, Mook, 1979; Krack, Gross, 2019).

The parametrization method of Dzhumabaev (1989) was created to obtain criteria of unique solvability of linear boundary value problems in terms of the initial data. Dzhumabaev and Temesheva (2007) extended it to nonlinear problems: they proved a sharpened local Hadamard theorem, proposed a family of algorithms with convergence conditions in terms of the initial data and established a criterion for an isolated solution; these results were refined later (Dzhumabaev, Temesheva, 2013; 2018), and modified algorithms and a numerical method were proposed (Temesheva, 2020; Temesheva et al.,

2021). An essential feature of this theory is that its convergence conditions improve as the partition is refined. What has been missing is a computational picture of this effect for a concrete oscillator and a comparison with modern approaches.

Physics-informed neural networks go back to the use of neural networks for solving differential equations (Lagaris et al., 1998) and were popularised by Raissi et al. (2019); their place in scientific machine learning is reviewed by Karniadakis et al. (2021). Known difficulties include imbalanced gradients between loss terms (Wang et al., 2021) and failure to learn solutions in more demanding regimes (Krishnapriyan et al., 2021). Exact enforcement of periodicity through Fourier-type inputs removes one source of error (Dong, Ni, 2021). However, the loss of a PINN measures only how well the equation is satisfied, not which solution is approximated, and for problems with several solutions this question is rarely addressed.

The relevance of the study follows from this situation. Intelligent systems increasingly embed neural solvers of differential equations, and the question of when such solvers can be trusted is practical. Nonlinear oscillators with coexisting periodic regimes are a demanding test because a solver may return a correct-looking but physically different solution. To the author's knowledge, a direct comparison of the parametrization method with PINNs has not been reported, and quantitative data on how the partition in the parametrization method affects the practical domain of convergence of Newton's method for the Duffing oscillator are scarce.

The object of the research is the periodic boundary value problem for the Duffing equation. The subject is the accuracy, cost, robustness and control over the multiplicity of solutions of the parametrization method and of PINNs. The aim is to compare the two approaches quantitatively. The tasks are: (1) to implement the parametrization method with Runge-Kutta integration, Newton's method, continuation and Floquet stability analysis; (2) to verify it on a problem with a known exact solution; (3) to measure the domain of convergence as a function of the number of subintervals and to relate it to the conditions of Newton-Kantorovich-type theorems; (4) to compute the frequency response of the physical damped Duffing oscillator; (5) to train PINNs on the same problems and compare the results. The hypothesis is that PINNs approach the accuracy of classical methods only at much higher cost and do not control which of the coexisting periodic solutions they find, whereas the parametrization method with a suitable partition and continuation provides both accuracy and control.

The scientific novelty consists in the first, to the author's knowledge, systematic comparison of the Dzhumabaev parametrization method with physics-informed neural networks; in the quantification, with confidence intervals, of the effect of the partition on the domain of convergence together with the Lipschitz constant of the Jacobian of the parameterized system; and in the use of the matrices computed by the method for Floquet stability analysis and arclength continuation of the frequency response.

**Materials and methods**

Research questions. RQ1: how accurate and how expensive is each approach? RQ2: how does the number of subintervals affect the domain of convergence of the parametrization method, and how does this relate to theoretical convergence conditions? RQ3: can each approach reproduce the coexisting periodic solutions of the physical Duffing oscillator? Hypothesis: as stated in the Introduction, PINNs are less accurate and more expensive and do not control the selection among coexisting solutions, whereas the parametrization method provides accuracy and, combined with continuation, control.

Problem 1 (verification problem). Written as a first-order system, the forced Duffing equation on [0, T] is

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\delta x_2 - \sigma^2 x_1 - \varepsilon\gamma x_1^3 + B\cos\omega t + g(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

with the periodic boundary condition

$$x(0) = x(T), \qquad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

where δ is the damping coefficient, σ the natural frequency, ε the nonlinearity coefficient, γ = +1 for hardening and γ = −1 for softening restoring force, and B cos ωt the external forcing. In Problem 1, δ = 0, T = 1, σ = 1, B = 2, ω = 2π, and ε ∈ [0.1, 10]. Following the method of manufactured solutions (Roache, 2002), the source term

$$g(t) = (\sigma^2 - 4\pi^2)\sin 2\pi t + \varepsilon\gamma \sin^3 2\pi t - B\cos 2\pi t \tag{3}$$

makes x*(t) = (sin 2πt, 2π cos 2πt) an exact solution, so that errors can be measured directly.

Problem 2 (physical problem). The damped forced Duffing oscillator without any artificial source term,

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \sigma^2 x + \varepsilon\gamma x^3 = B\cos\omega t, \qquad x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T), \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{4}$$

with δ = 0.1, σ = 1, εγ = 1 and B = 0.3, was studied for forcing frequencies ω ∈ [0.6, 3.2]. Its periodic solutions form the frequency response curve, which for a hardening spring contains a region of coexisting solutions (Nayfeh, Mook, 1979).

Parametrization method. The interval is divided as $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, the parameters $\lambda_r = x(t_{r-1})$ and the functions $u_r(t) = x(t) - \lambda_r$ are introduced, and the problem becomes equivalent to the problem with parameters (Dzhumabaev, 1989; Dzhumabaev, Temesheva, 2007)

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \qquad u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1,N}, \tag{5}$$

$$\lambda_1 - \lambda_N - u_N(T) = 0, \qquad \lambda_r + u_r(t_r) - \lambda_{r+1} = 0, \quad r = \overline{1,N-1}, \tag{6}$$

where f is the right-hand side of (1). The boundary condition and the matching conditions (6) form a system Q(λ) = 0 of 2N equations, solved by Newton's method (Kantorovich, Akilov, 1982; Deuflhard, 2011)

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\left(\lambda^{(k)}\right)\Delta\lambda^{(k)} = -Q\left(\lambda^{(k)}\right), \qquad \lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)}. \tag{7}$$

The blocks of the Jacobian are obtained from the variational equations

$$\frac{dZ_r}{dt} = f_x\left(t, \lambda_r + u_r(t)\right)Z_r, \quad Z_r(t_{r-1}) = I, \qquad f_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^2 - 3\varepsilon\gamma x_1^2 & -\delta \end{pmatrix}, \tag{8}$$

since $\partial(\lambda_r + u_r(t_r))/\partial\lambda_r = Z_r(t_r)$. Problems (5) and (8) were integrated jointly by the classical fourth-order Runge-Kutta method (Hairer et al., 1993; Butcher, 2016); iterations stopped when $\max|\Delta\lambda^{(k)}| < 10^{-10}$. For N = 1 the algebraic system coincides with that of single shooting and for N > 1 it is algebraically related to multiple shooting (Stoer, Bulirsch, 2002). The parametrization method contributes the theory of the problem with parameters — solvability criteria, conditions of convergence and of the existence of an isolated solution (Dzhumabaev, Temesheva, 2007; 2013; 2018) — which is used below to interpret the role of the partition.

Stability and continuation. The monodromy matrix of a periodic solution is the product of the matrices already computed by the method,

$$M = Z_N(t_N)\, Z_{N-1}(t_{N-1}) \cdots Z_1(t_1), \tag{9}$$

and the solution is asymptotically stable if all Floquet multipliers, the eigenvalues of M, lie inside the unit circle (Nayfeh, Balachandran, 1995). The frequency response of Problem 2 was traced by pseudo-arclength continuation in the variables y = (λ, ω) (Keller, 1977; Allgower, Georg, 2003), which adds to Q(λ, ω) = 0 the condition

$$\dot{y}_j^{\mathrm{T}}\left(y_{j+1} - y_j\right) - \Delta s = 0, \tag{10}$$

where $\dot{y}_j$ is the unit tangent and Δs the step; this allows the curve to pass around fold points where natural continuation in ω fails. Natural sweeps upward and downward in ω with step 0.02 were also performed. In Problem 1, natural continuation in ε from the linear problem (ε = 0) in ten steps was used as a baseline for choosing initial approximations.

Convergence conditions. Newton's method converges from any $\lambda^{(0)}$ with $|\lambda^{(0)} - \lambda| < 2/(3\beta K)$, *where β is the norm of the inverse Jacobian at the solution and K the Lipschitz constant of the Jacobian (Traub, Woźniakowski, 1979). To relate this condition to the partition, β and K were estimated at the solution of Problem 1 for N = 1, 2, 4, 8, with K computed as the largest ratio* $|\partial Q/\partial\lambda(\lambda) - \partial Q/\partial\lambda(\lambda)| \,/\, |\lambda - \lambda|$ *over 120 random points with* $|\lambda - \lambda| \le 1$ in the maximum norm.

Physics-informed neural networks. The solution $x_1$ was approximated by a fully connected network with two hidden layers of 32 neurons and tanh activation. In the variant with exact periodicity the network inputs were sin ωt and cos ωt, so that every network output satisfies the periodic condition (Dong, Ni, 2021); in the variant with a soft constraint the input was t and the periodicity mismatch was added to the loss with weight 10. The loss was the mean squared residual of the equation at 256 collocation points,

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\hat{x}_\theta''(t_k) + \delta\hat{x}_\theta'(t_k) + \sigma^2\hat{x}_\theta(t_k) + \varepsilon\gamma\hat{x}_\theta^3(t_k) - B\cos\omega t_k - g(t_k))^2, \quad (11)$$

with derivatives computed by automatic differentiation (Maclaurin et al., 2015). Training used 2000 iterations of Adam (Kingma, Ba, 2015) followed by up to 3000 iterations of L-BFGS (Liu, Nocedal, 1989), as recommended for PINNs (Raissi et al., 2019). Each configuration was trained from three (Problem 1) or five (Problem 2) random initialisations.

Experiments and material. E1 (accuracy): errors of the parametrization method for Runge-Kutta steps h = 0.1-0.00625 and N = 1, 4. E2 (robustness): for $\gamma = -1$, $\varepsilon \in \{1, 5, 10\}$ and $\gamma = 1$, $\varepsilon \in \{5, 10\}$, Newton's method was started from 200 random constant initial approximations $x^{(0)} \equiv c$ with c uniform in $[-A, A]^2$, $A \in \{2, 6\}$; each run was classified as convergence to x* (error below $10^{-5}$), convergence to another periodic solution, or divergence, and 95% Wilson confidence intervals were computed (Wilson, 1927). The same starts were given to the collocation solver solve_bvp (Kierzenka, Shampine, 2001; Virtanen et al., 2020). E3 (convergence conditions): β and K as described above. E4 (physical problem): frequency response of Problem 2 with N = 4 and 400 Runge-Kutta steps per period, compared with the first-harmonic balance approximation (Nayfeh, Mook, 1979). E5 (PINNs): six regimes of Problem 1 ($\varepsilon \in \{0.1, 1, 10\}$, $\gamma = \pm 1$) and Problem 2 at $\omega = 1.0$ and $\omega = 1.5$. Computations were performed in Python 3 with NumPy and SciPy on a single CPU core. The code used for all computations is available from the author upon request.

## Results and discussion

### Accuracy, convergence rate and cost of the parametrization method

Table 1 shows the errors for Problem 1 with $\varepsilon = 0.1$, $\gamma = 1$. Halving the Runge-Kutta step reduced the error about sixteen times, and the observed order tended to 4.00, confirming the theoretical order of the scheme. The partition N = 4 gave the same error as N = 1 for $h \le 0.05$.

| Step h | Error, N = 1 | Error, N = 4 | Ratio E(2h)/E(h) | Observed order |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | $3.71\cdot10^{-4}$ | $9.15\cdot10^{-4}$ | - | - |
| 0.05 | $2.29\cdot10^{-5}$ | $2.29\cdot10^{-5}$ | 16.2 | 4.02 |
| 0.025 | $1.42\cdot10^{-6}$ | $1.42\cdot10^{-6}$ | 16.1 | 4.01 |
| 0.0125 | $8.89\cdot10^{-8}$ | $8.89\cdot10^{-8}$ | 16.0 | 4.00 |
| 0.00625 | $5.56\cdot10^{-9}$ | $5.56\cdot10^{-9}$ | 16.0 | 4.00 |

Table 1 - Maximum error of the parametrization method for Problem 1 ($\varepsilon = 0.1$, $\gamma = 1$)

Newton's method showed quadratic convergence near the solution. For $\varepsilon = 1$, $\gamma = -1$, N = 4 and a distant initial approximation, the increments of the last iterations were $1.2\cdot10^{-2}$, $1.2\cdot10^{-4}$, $9.4\cdot10^{-9}$ and $2.1\cdot10^{-15}$: each was approximately the square of the previous one. One solution of Problem 1 with N = 4 and h = 0.01 took 0.023 s, comparable to 0.019 s for the collocation solver.

### Domain of convergence and the partition

Table 2 and Figure 1 present the results of experiment E2 for softening nonlinearity. Without partitioning, Newton's method converged from 0-9% of the initial approximations; with eight subintervals the share rose to 61-100%. For $\varepsilon = 10$ and A = 2 it increased from 0% (N = 1 and N = 2) to 70% (N = 4) and 95.5% (N = 8). The confidence intervals of N = 1 and N = 8 do not overlap in any configuration. The apparent non-monotonicity at $\varepsilon = 5$, A = 2 (100% for N = 4 and 97% for N = 8) lies within the confidence intervals; it reflects the larger number of unknown parameters that must be approximated simultaneously when N grows.

| ε | A | N = 1 | N = 2 | N = 4 | N = 8 | Collocation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 [2-8] | 73.5 [67-79] | 94 [90-97] | 98.5 [96-99] | 100 [98-100] |
| 1 | 6 | 9 [6-14] | 25 [20-31] | 94.5 [90-97] | 100 [98-100] | 100 [98-100] |
| 5 | 2 | 0.5 [0-3] | 11 [7-16] | 100 [98-100] | 97 [94-99] | 100 [98-100] |

| ε | A | N = 1 | N = 2 | N = 4 | N = 8 | Collocation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 0.5 [0-3] | 3.5 [2-7] | 38 [32-45] | 88 [83-92] | 100 [98-100] |
| 10 | 2 | 0 [0-2] | 0 [0-2] | 70 [63-76] | 95.5 [92-98] | 100 [98-100] |
| 10 | 6 | 0 [0-2] | 0 [0-2] | 19 [14-25] | 61 [54-67] | 100 [98-100] |

Table 2 - Softening nonlinearity (γ = −1): share of 200 initial approximations converging to the solution, % [95% confidence interval]

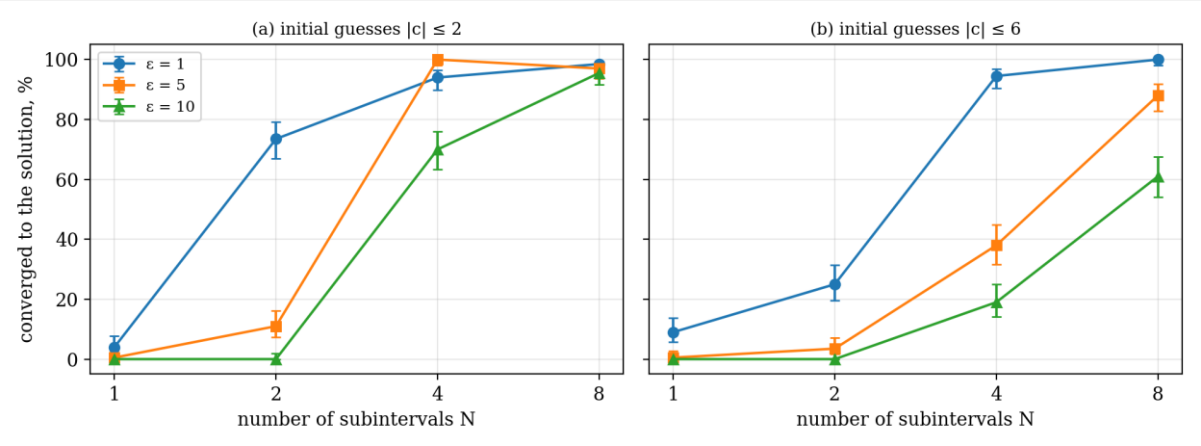



Figure 1 - Share of initial approximations converging to the solution as a function of the number of subintervals N, with 95% confidence intervals: (a) |c| ≤ 2, (b) |c| ≤ 6

The cause of this effect is visible in the convergence conditions. For ε = 10, γ = −1, the Lipschitz constant K of the Jacobian over the ball $|\lambda - \lambda^*| \le 1$ was unbounded for N = 1 and N = 2, because for some points of the ball the Cauchy problems blew up before the end of the period, whereas it was finite for N = 4 (K = 407) and N = 8 (K = 20.8). For ε = 5 the values were unbounded, $1.5 \cdot 10^7$, 32.2 and 7.6 for N = 1, 2, 4, 8. For weak hardening nonlinearity (ε = 0.1) K was small for all N (0.60, 0.48, 0.20 and 0.11). The norm of the inverse Jacobian β grew with N (2.2, 2.7, 5.5 and 10.0 for ε = 10). Partitioning therefore makes the system Q(λ) = 0 well defined and smooth on a large neighbourhood of the solution, which is exactly what theorems of the Newton-Kantorovich type require, at the cost of a moderate growth of β. The guaranteed radius $2/(3\beta K)$ is conservative ($3.2 \cdot 10^{-3}$ for ε = 10, N = 8), but it is non-negligible only for N ≥ 4, in agreement with the experiment.

Two further observations limit the role of the partition. First, natural continuation in ε from the linear problem converged to the solution in all five strongly nonlinear regimes both for N = 1 and for N = 4, with 22 Newton iterations in total and errors of $2 \cdot 10^{-8}$-$5 \cdot 10^{-7}$. The partition is therefore decisive when no continuous path from a known solution is available, for example when coexisting solutions are sought. Second, for hardening nonlinearity (ε = 5 and ε = 10) the partition N = 4 raised convergence to the solution from 1% and 0% to 60.5% and 40.5%, but N = 8 gave no further gain, and many runs converged to other periodic solutions; collocation reached 75.5% and 48.5%, with 21.5% and 43% of runs ending at other solutions. Collocation was the most robust method under softening nonlinearity (100%).

**Physical Duffing oscillator: frequency response and stability**

For Problem 2 the parametrization method combined with continuation reproduced the classical picture of a hardening Duffing oscillator (Figure 2). In the upward sweep the amplitude followed the upper branch and dropped from 1.67 to 0.15 between ω = 1.72 and 1.74; in the downward sweep it jumped from 0.46 to 1.15 between ω = 1.34 and 1.32. Arclength continuation passed around both folds, located at ω ≈ 1.780 (amplitude 1.723) and ω ≈ 1.324 (amplitude 0.597), and traced the middle branch: 78 of 208 computed points had a Floquet multiplier outside the unit circle and were unstable, while all points of the upper and lower branches were stable. The natural sweeps left the upper branch slightly before the fold, because a step of 0.02 near the fold carried Newton's method to the lower branch, whereas arclength continuation located the fold precisely; at most 13 Newton iterations per step were needed. The amplitudes agreed with the harmonic balance approximation within 1.5% (at ω = 1.5:

0.247, 1.19 and 1.391 against 0.247, 1.180 and 1.371), the difference being due to higher harmonics neglected by the approximation.

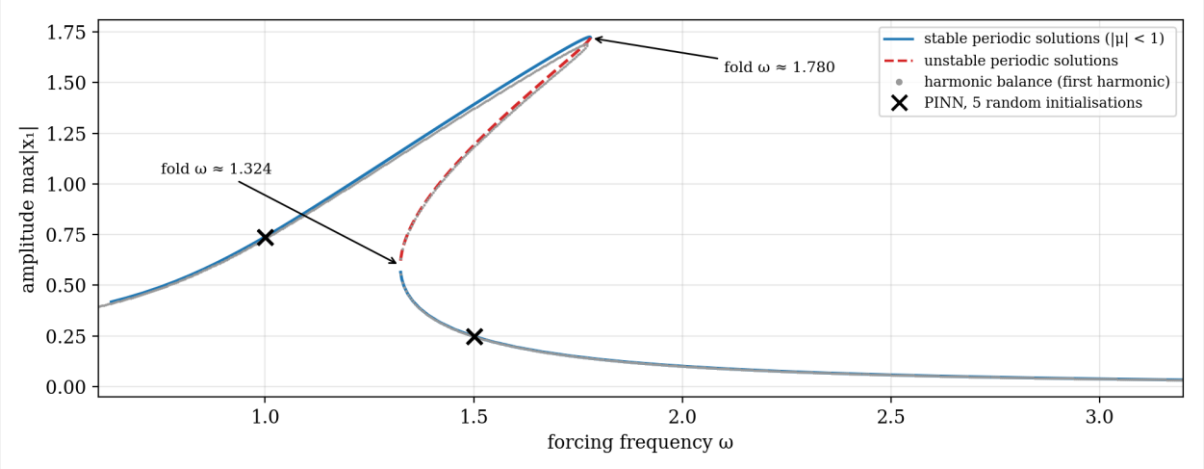



Figure 2 - Frequency response of the damped Duffing oscillator computed by the parametrization method with arclength continuation, compared with harmonic balance and with PINN solutions

**Comparison with physics-informed neural networks**

Table 3 compares the two approaches on Problem 1. With exactly periodic inputs, PINNs reached errors of $5\cdot10^{-6}$-$6\cdot10^{-4}$ in about 22 s of training; with the soft periodicity constraint the errors were $10^{-4}$-$9\cdot10^{-3}$ after about 40 s. The parametrization method reached errors of $2\cdot10^{-8}$-$5\cdot10^{-7}$ in hundredths of a second, that is, it was two to five orders of magnitude more accurate and roughly 1,000-1,700 times faster.

| ε | γ | Parametrization method | PINN, exact periodicity | PINN, soft constraint |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | +1 | $3.6\cdot10^{-8}$ | $3.6\cdot10^{-5}$ [$5.2\cdot10^{-6}$-$8.8\cdot10^{-5}$] | $9.6\cdot10^{-4}$ [$7.1\cdot10^{-4}$-$1.0\cdot10^{-3}$] |
| 0.1 | −1 | $3.3\cdot10^{-8}$ | $7.3\cdot10^{-5}$ [$2.6\cdot10^{-5}$-$1.9\cdot10^{-4}$] | other solution (3 of 3) |
| 1 | +1 | $5.8\cdot10^{-8}$ | $6.5\cdot10^{-6}$ [$4.5\cdot10^{-6}$-$1.5\cdot10^{-5}$] | $4.3\cdot10^{-4}$ [$1.5\cdot10^{-4}$-$5.9\cdot10^{-4}$] |
| 1 | −1 | $2.3\cdot10^{-8}$ | $7.8\cdot10^{-5}$ [$4.5\cdot10^{-5}$-$5.6\cdot10^{-4}$] | $5.8\cdot10^{-3}$ [$4.6\cdot10^{-3}$-$8.9\cdot10^{-3}$] |
| 10 | +1 | $3.4\cdot10^{-7}$ | other solution (3 of 3) | $1.6\cdot10^{-4}$ [$1.0\cdot10^{-4}$-$2.7\cdot10^{-4}$] |
| 10 | −1 | $4.7\cdot10^{-7}$ | $8.7\cdot10^{-6}$ [$7.7\cdot10^{-6}$-$1.1\cdot10^{-5}$] | $2.3\cdot10^{-4}$ [$2.3\cdot10^{-4}$-$3.0\cdot10^{-4}$] |

Table 3 - Maximum error for Problem 1: Parametrization method (N = 4, h = 0.01) and PINNs (median [minimum-maximum] over three initialisations)

The most important finding concerns reliability rather than accuracy. In two of the twelve PINN configurations, all three training runs converged to a different periodic solution: the error with respect to x* was 0.59 and 3.0, while the final loss ($10^{-9}$ and $10^{-7}$) was as small as in the successful runs. A small loss therefore does not show that the intended solution has been found. In Problem 2 the same effect appeared in physical form. At ω = 1.0, where the periodic solution is unique, all five PINN runs gave the amplitude 0.73830, which coincides with the value 0.73828 of the parametrization method to within $3\cdot10^{-5}$. At ω = 1.5, where three periodic solutions coexist, all five runs converged to the lower branch (0.2474), and none found the upper stable branch (1.391), which is the response actually observed after an upward frequency sweep, or the unstable branch. The parametrization method found all three solutions and determined their stability.

Comparison with earlier studies. The failure of PINNs to select the intended solution complements the known failure modes of PINNs, which have so far been attributed mainly to optimisation difficulties and imbalanced gradients (Wang et al., 2021; Krishnapriyan et al., 2021): here the optimisation succeeded, yet the network converged to another solution of the same problem. The computed frequency response agrees with the classical analytical description of the hardening Duffing oscillator

(Nayfeh, Mook, 1979; Kovacic, Brennan, 2011), and the gain from partitioning agrees with the theory of the parametrization method, in which the convergence conditions improve as the partition is refined (Dzhumabaev, Temesheva, 2007). In this sense the study confirms the theoretical role of the partition computationally and transfers it to a new task — the verification of neural solvers.

These results support the hypothesis and suggest a division of roles. PINNs are attractive when a mesh-free, differentiable approximation is needed or when the solver is embedded in a larger learning system. Their output, however, must be verified, and the parametrization method provides the necessary tools: an accurate reference solution, the residual of the matching conditions, Floquet multipliers that classify stability and continuation that reveals coexisting solutions. A hybrid intelligent system can use the parametrization method to verify a PINN solution or to supply it with a target branch.

**Conclusion**

The aim of the study was achieved by implementing the Dzhumabaev parametrization method with Runge-Kutta integration, Newton's method, continuation and Floquet analysis, and by comparing it with physics-informed neural networks on two Duffing problems.

The main results are as follows. The parametrization method reached errors of $10^{-8}$-$10^{-7}$ with fourth-order convergence in the step and quadratic convergence of Newton's method, at a cost of hundredths of a second. Under strong softening nonlinearity, eight subintervals raised the share of convergent initial approximations from 0-9% to 61-100%; this effect is explained by the Lipschitz constant of the Jacobian, which is unbounded without partitioning and becomes finite for $N \geq 4$. Combined with arclength continuation and Floquet multipliers, the method reproduced the full frequency response of the damped Duffing oscillator with both folds and the unstable branch. PINNs were two to five orders of magnitude less accurate and roughly a thousand times slower, and in some regimes converged, with an equally small loss, to a periodic solution different from the intended one; in the region of coexisting solutions they found only one of three.

The study shows that neural solvers of differential equations should be accompanied by classical verification when solutions are not unique, and that the parametrization method is well suited for this role. The results can be applied in teaching numerical methods and in the design of intelligent systems that use neural solvers for nonlinear oscillators. Further work includes training PINNs on selected branches using information from the parametrization method, adaptive choice of the partition from the growth of the variational matrices, and extension to systems with several degrees of freedom.

**Author contributions**

Kim A.E. formulated the problem, implemented the parametrization method and the physics-informed neural networks, performed the computations, analysed the results and wrote the manuscript.

**Funding information**

This research received no external funding. The author thanks D.S. Dzhumabaev for scientific guidance.

**References**

1. Allgower E.L., Georg K. (2003). *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Philadelphia: SIAM. 388 p.
2. Ascher U.M., Mattheij R.M.M., Russell R.D. (1995). *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Philadelphia: SIAM. 595 p.
3. Butcher J.C. (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 3rd ed. Chichester: Wiley. 513 p.
4. Deuflhard P. (2011). *Newton Methods for Nonlinear Problems: Affine Invariance and Adaptive Algorithms*. Berlin: Springer. 424 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23899-4
5. Dong S., Ni N. (2021). A method for representing periodic functions and enforcing exactly periodic boundary conditions with deep neural networks. *Journal of Computational Physics*, 435, 110242. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110242
6. Duffing G. (1918). *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung* [Forced oscillations with variable natural frequency and their technical significance]. Braunschweig: Vieweg. 134 p. (In German)

7. Dzhumabaev D.S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34-46.
8. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. (2007). A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 47(1), 37-61.
9. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. (2013). Necessary and sufficient conditions for the existence of an "isolated" solution of a nonlinear two-point boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 194(4), 341-353.
10. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. (2018). Criteria for the existence of an isolated solution of a nonlinear boundary-value problem. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70(3), 410-421.
11. Guckenheimer J., Holmes P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer. 459 p.
12. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. 2nd ed. Berlin: Springer. 528 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1
13. Holmes P. (1979). A nonlinear oscillator with a strange attractor. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 292(1394), 419-448. https://doi.org/10.1098/rsta.1979.0068
14. Kantorovich L.V., Akilov G.P. (1982). *Functional Analysis*. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press. 589 p.
15. Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L. (2021). Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics*, 3(6), 422-440. https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5
16. Keller H.B. (1968). *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Waltham: Blaisdell. 184 p.
17. Keller H.B. (1977). Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In: P.H. Rabinowitz (Ed.), *Applications of Bifurcation Theory* (pp. 359-384). New York: Academic Press.
18. Kierzenka J., Shampine L.F. (2001). A BVP solver based on residual control and the MATLAB PSE. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 27(3), 299-316. https://doi.org/10.1145/502800.502801
19. Kingma D.P., Ba J. (2015). Adam: a method for stochastic optimization. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Learning Representations (ICLR)*. San Diego. https://arxiv.org/abs/1412.6980
20. Kovacic I., Brennan M.J. (Eds.) (2011). *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. Chichester: Wiley. 386 p.
21. Krack M., Gross J. (2019). *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Cham: Springer. 159 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6
22. Krishnapriyan A.S., Gholami A., Zhe S., Kirby R.M., Mahoney M.W. (2021). Characterizing possible failure modes in physics-informed neural networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 34, 26548-26560. https://arxiv.org/abs/2109.01050
23. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. (1998). Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(5), 987-1000. https://doi.org/10.1109/72.712178
24. Liu D.C., Nocedal J. (1989). On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical Programming*, 45, 503-528. https://doi.org/10.1007/BF01589116
25. Maclaurin D., Duvenaud D., Adams R.P. (2015). Autograd: effortless gradients in NumPy. In: *ICML 2015 AutoML Workshop*. Lille. https://github.com/HIPS/autograd
26. Nayfeh A.H., Balachandran B. (1995). *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. New York: Wiley. 685 p.
27. Nayfeh A.H., Mook D.T. (1979). *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley. 704 p.
28. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. (2019). Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686-707. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045
29. Roache P.J. (2002). Code verification by the method of manufactured solutions. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1), 4-10. https://doi.org/10.1115/1.1436090

30. Stoer J., Bulirsch R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. 3rd ed. New York: Springer. 744 p. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21738-3
31. Temesheva S.M. (2020). A modification of algorithms of the Dzhumabaev parametrization method and a numerical method. *International Journal of Information and Communication Technologies*, 2(1), 66-73.
32. Temesheva S.M., Abdimanapova P.B., Borisov D.I. (2021). Ob odnom metode resheniya semeistva nelineinykh kraevykh zadach dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [On a method for solving a family of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations]. *[Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and Mathematical Sciences]*, 1(73), 70-75. https://doi.org/10.51889/2021-1.1728-7901.09 (In Russ.)
33. Traub J.F., Woźniakowski H. (1979). Convergence and complexity of Newton iteration for operator equations. *Journal of the ACM*, 26(2), 250-258.
34. Ueda Y. (1979). Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation. *Journal of Statistical Physics*, 20(2), 181-196. https://doi.org/10.1007/BF01011513
35. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al. (2020). SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17(3), 261-272. https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2
36. Wang S., Teng Y., Perdikaris P. (2021). Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 43(5), A3055-A3081. https://doi.org/10.1137/20M1318043
37. Wilson E.B. (1927). Probable inference, the law of succession, and statistical inference. *Journal of the American Statistical Association*, 22(158), 209-212. https://doi.org/10.1080/01621459.1927.10502953

**UDC: 004.4**
**DOI: https://doi.org/10.66941/3106-9037/2026/iss3pp17-31**

**Azibek B.[1], Buganova S.[2], Kurmash A.[1], Kulmanov A.[3], Zhakiyev N.[2,*]**
*[1]Astana IT University, Astana, Kazakhstan;*
*[2]Kazakh Leading Academy of Architecture and Civil Engineering;*
*[3]International Educational Corporation, Almaty, Kazakhstan.*
*E-mail: n.zhakiyev@kazgasa.kz*

## REINFORCEMENT LEARNING FOR STRATEGIC BIDDING IN DAY-AHEAD ELECTRICITY MARKET

**Balzhan Azibek,** Senior Lecturer, School of Intelligent Systems, Astana IT University, Astana, Kazakhstan;
E-mail: balzhan.azibek@astanait.edu.kz, orcid.org/0000-0001-7389-7777
**Buganova Svetlana**, Professor, Candidate of Technical Sciences, Kazakh Leading Academy of Architecture and Civil Engineering (KazGASA), Almaty, Kazakhstan;
E-mail: svetlanabuganova7@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2005-3305
**Alisher Kurmash,** junior researcher, School of AI and Data Science, Astana IT University, Astana, Kazakhstan;
E-mail: 243008@astanait.edu.kz
**Azamat Kulmanov,** International Educational Corporation, Almaty, Kazakhstan, E-mail: a.kulmanov@kazgasa.kz
**Nurkhat Zhakiyev,** Professor, Kazakh Leading Academy of Architecture and Civil Engineering (KazGASA), Almaty, Kazakhstan.
E-mail: n.zhakiyev@kazgasa.kz, orcid.org/0000-0002-4904-2047

**Abstract**

Reinforcement learning may improve strategic bidding in electricity markets, yet many studies rely on stylized or synthetic environments. This study evaluates reinforcement learning using bid-level data from the Kazakhstan Electricity and Power Market Operator (KOREM) covering July 2023–November 2025. Objectives include reconstructing endogenous pay-as-cleared prices through merit-order clearing, modeling one strategic generator alongside passive historical participants, and evaluating out-of-sample performance. Marginal costs are approximated by the 10th percentile of each generator's historical bid prices. Double Q-learning replaces classical Q-learning to address observed instability associated with overestimation bias, while bounded markup decisions and realistic market constraints ensure economically plausible bidding. Evaluation using a chronological 80/20 train–test split indicates an approximately 0.37% profit improvement relative to cost-based bidding, without distorting clearing price distributions or intraday patterns. Stabilized reinforcement learning can modestly enhance strategic bidding in an empirically grounded electricity market while preserving fundamental price formation properties.

**Keywords:** day-ahead electricity market; agent-based modeling; reinforcement learning; Q-learning; double Q-learning; strategic bidding; market power.

**Б. Азибек[1], С. Буганова[2], А. Курмаш[1], А. Кулманов[3], Н. Жакиев[2]***
*[1]Astana IT University, Астана, Казахстан;*
*[2]Казахская головная архитектурно-строительная академия (КазГАСА), Алматы, Казахстан;*
*[3]Международная образовательная корпорация, Алматы, Казахстан.*
*E-mail: n.zhakiyev@kazgasa.kz*

## ОБУЧЕНИЕ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ТОРГОВ НА РЫНКЕ «НА СУТКИ ВПЕРЁД»

**Балжан Азибек,** старший преподаватель Школы интеллектуальных систем, Astana IT University, Астана, Казахстан;

E-mail: balzhan.azibek@astanait.edu.kz, https://orcid.org/0000-0001-7389-7777
**Буганова Светлана,** профессор, кандидат технических наук, Казахская головная архитектурно-строительная академия (КазГАСА), Алматы, Казахстан;
E-mail: svetlanabuganova7@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2005-3305
**Алишер Курмаш**, мнс Школы искусственного интеллекта и науки о данных, Astana IT University, Астана, Казахстан. E-mail: 243008@astanait.edu.kz
**Азамат Кулманов,** Международная образовательная корпорация, Алматы, Казахстан;
E-mail: a.kulmanov@kazgasa.kz
**Нурхат Жакиев,** профессор, Казахская головная архитектурно-строительная академия (КазГАСА), Алматы, Казахстан.
E-mail: n.zhakiyev@kazgasa.kz, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4904-2047.

**Аннотация**

Обучение с подкреплением может улучшить стратегическую подачу заявок на электроэнергетических рынках, однако многие исследования используют стилизованные или синтетические среды. Исследование оценивает обучение с подкреплением на основе данных заявок Казахстанского оператора рынка электрической энергии и мощности (KOREM) за июль 2023 - ноябрь 2025 года. Задачи включают воспроизведение эндогенного формирования единой равновесной цены посредством ранжирования заявок, моделирование одного стратегического генератора при пассивном поведении остальных исторических участников и вневыборочную оценку эффективности. Предельные издержки оцениваются по 10-му процентилю исторических цен заявок каждого генератора. Двойное Q-обучение заменяет классическое Q-обучение для устранения нестабильности, связанной с завышением оценок; ограниченные ценовые надбавки и реалистичные рыночные ограничения обеспечивают экономическую правдоподобность поведения. Хронологическое разделение данных на обучающую и тестовую выборки в соотношении 80/20 показывает увеличение прибыли приблизительно на 0,37% относительно заявок на основе издержек без искажения распределений равновесных цен и внутрисуточной динамики. Стабилизированное обучение с подкреплением позволяет умеренно улучшить стратегическую подачу заявок на эмпирически обоснованном рынке, сохраняя основные свойства ценообразования.

**Ключевые слова:** рынок электроэнергии «на сутки вперёд»; агентное моделирование; обучение с подкреплением; Q-обучение; двойное Q-обучение; стратегическая подача заявок; рыночная власть.

**Б. Азибек[1], С. Буганова[2], Ә. Құрмаш[1], А. Кулманов[3], Н. Жакиев[2,*]**
*[1]Astana IT University, Астана, Қазақстан;*
*[2]Қазақ бас сәулет-құрылыс академиясы (ҚазБСҚА), Алматы, Қазақстан;*
*[3]Халықаралық білім беру корпорациясы, Алматы, Қазақстан.*
*E-mail: n.zhakiyev@kazgasa.kz*

## ЭЛЕКТР ЭНЕРГИЯСЫ НАРЫҒЫНДА «ТӘУЛІК БҰРЫН» СТРАТЕГИЯЛЫҚ САУДАЛАСУҒА АРНАЛҒАН НЫҒАЙТУМЕН ОҚЫТУ

**Балжан Азибек,** Зияткерлік жүйелер мектебінің аға оқытушысы, Astana IT University, Астана, Қазақстан;
E-mail: balzhan.azibek@astanait.edu.kz, https://orcid.org/0000-0001-7389-7777
**Буганова Светлана,** профессор, техника ғылымдарының кандидаты, Қазақ бас сәулет-құрылыс академиясы (ҚазБСҚА), Алматы, Қазақстан;
E-mail: svetlanabuganova7@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2005-3305.
**Әлішер Құрмаш,** Жасанды интеллект және деректер ғылымы мектебінің кіші ғылыми қызметкері, Astana IT University, Астана, Қазақстан, E-mail: 243008@astanait.edu.kz
**Азамат Кулманов,** Халықаралық білім беру корпорациясы, Алматы, Қазақстан;
E-mail: a.kulmanov@kazgasa.kz

**Нұрхат Жакиев,** профессор, Қазақ бас сәулет-құрылыс академиясы (ҚазБСҚА), Алматы, Қазақстан.
E-mail: n.zhakiyev@kazgasa.kz, https://orcid.org/0000-0002-4904-2047.

**Аннотация**

Нығайтумен оқыту электр энергиясы нарықтарындағы стратегиялық өтінім беруді жақсарта алады, алайда көптеген зерттеулер шартты немесе синтетикалық орталарға сүйенеді. Зерттеуде Электр энергиясы мен қуат нарығының қазақстандық нарық операторының АҚ (KOREM) ұсынған 2023 жылғы шілде мен 2025 жылғы қараша аралығындағы өтінім деректері негізінде нығайтумен оқыту бағаланады. Зерттеу міндеттер өтінімдерді бағасы бойынша ранжирлеу арқылы бірыңғай тепе-теңдік бағаның эндогенді қалыптасуын қайта құруды, тарихи қатысушылардың енжар мінез-құлқы жағдайында бір стратегиялық генераторды модельдеуді және оқыту іріктемесінен тыс нәтижелерді бағалауды қамтиды. Шекті шығындар әрбір генератордың тарихи өтінім бағаларының 10-процентилі арқылы жуықталады. Q-мәндерін асыра бағалауға байланысты тұрақсыздықты азайту үшін классикалық Q-оқытудың орнына қосарлы Q-оқыту қолданылады; шектелген баға үстемелері мен шынайы нарықтық шектеулер экономикалық тұрғыдан негізді мінез-құлықты қамтамасыз етеді. Деректерді оқыту және тестілеу іріктемелеріне хронологиялық бөлу (80/20) кезінде алынған нәтижелер агенттің тепе-теңдік бағалардың үлестірімдері мен тәулік ішіндегі баға динамикасын бұрмаламай, шығындарға негізделген өтінімдермен салыстырғанда пайданы шамамен 0,37%-ға арттыратынын көрсетті. Тұрақтандырылған нығайтумен оқыту эмпирикалық негізделген нарықта баға қалыптасуының негізгі қасиеттерін сақтай отырып, стратегиялық өтінім беруді біршама жақсарта алады.

**Түйін сөздер:** «тәулік бұрын» электр энергиясы нарығы; агенттік модельдеу; нығайтумен оқыту; Q-оқыту; қосарлы Q-оқыту; стратегиялық өтінім беру; нарықтық билік.

**Introduction.** Liberalized electricity markets rely on auction-based mechanisms to coordinate decentralized supply and demand while maintaining efficiency, reliability, and competitive neutrality. In day-ahead markets, generators submit price–quantity bids for hourly delivery, and a system operator clears the market using a merit-order dispatch rule that determines a uniform clearing price. Although this framework is designed to promote competitive efficiency, strategic bidding remains an inherent feature of such markets. Heterogeneous cost structures, residual demand elasticity, repeated market interaction, and information asymmetry create incentives for generators to deviate from pure marginal-cost bidding.

Traditional approaches to analyzing strategic behavior in electricity markets rely on equilibrium-based models, most notably Nash–Cournot formulations and bilevel optimization frameworks. While analytically powerful, these approaches assume a high degree of rationality and informational completeness. In practice, market participants operate under uncertainty, observe only partial system states, and adapt behavior dynamically over time. As a result, equilibrium models often provide theoretical benchmarks rather than operational descriptions of strategic learning.

Agent-based modeling (ABM) has emerged as an alternative framework capable of representing electricity markets as complex adaptive systems. In ABM environments, prices and dispatch outcomes emerge from interactions among heterogeneous agents following behavioral rules. This paradigm enables modeling of bounded rationality, adaptation, and institutional detail within auction-based market designs.

Reinforcement learning (RL) provides a natural mechanism for embedding adaptive strategic behavior within such agent-based environments. By iteratively updating decisions based on realized profit signals, RL agents can learn effective bidding strategies without explicit knowledge of competitor cost functions or closed-form equilibrium conditions. Recent studies have demonstrated the potential of RL and deep RL in stylized electricity market simulations. However, the empirical grounding of such models remains limited in many cases, as synthetic demand curves and artificial cost functions are often employed.

The core problem addressed in this study is therefore the following: How does reinforcement learning perform when embedded within a reconstructed real-world day-ahead electricity market derived directly from historical bid-level data, rather than within a stylized synthetic environment?»

More specifically, the study investigates whether adaptive bidding via reinforcement learning can improve generator profitability while preserving structural properties of price formation in an empirically reconstructed market environment.

This problem is non-trivial. Reinforcement learning algorithms, particularly value-based methods, are susceptible to instability, overestimation bias, and excessive exploitation when interacting with auction mechanisms. Without careful design, RL-based strategies may generate unrealistic price escalation or volatility artifacts that do not reflect plausible market behavior. Evaluating RL in a realistic empirical setting therefore requires careful integration of auction reconstruction, cost proxy estimation, and stability safeguards.

The relevance of this study is both methodological and practical.

From a methodological perspective, embedding reinforcement learning within a reconstructed real market environment advances the realism of strategic bidding simulations. By reconstructing clearing outcomes directly from historical bid-level data, the model avoids reliance on synthetic cost assumptions and externally imposed clearing prices. This approach strengthens the credibility of conclusions regarding algorithmic performance.

From a practical perspective, electricity markets are increasingly influenced by algorithmic decision systems. Generators employ automated optimization tools to formulate bids, and the penetration of digital decision-making continues to grow. Understanding how adaptive learning algorithms interact with real auction structures is therefore important for both market participants and regulators.

If reinforcement learning algorithms systematically distort price formation, regulators may need to consider oversight mechanisms. Conversely, if bounded and stabilized RL can enhance efficiency without destabilizing markets, it may represent a viable strategic optimization tool under competitive constraints. By evaluating reinforcement learning within a reconstructed empirical market derived from nearly two years of real day-ahead bidding data, this study provides insight into how adaptive algorithms behave under authentic competitive conditions. The primary contribution of this paper is the integration of reinforcement learning into a fully reconstructed empirical market environment using bid-level data from KOREM. Rather than using published clearing prices or synthetic cost curves, the model reconstructs hourly supply stacks directly from historical bids and applies a pay-as-cleared clearing mechanism consistent with institutional market rules. The strategic agent operates within this reconstructed environment while all other participants retain their historical bids. This design ensures realistic competitive depth while isolating the effect of adaptive bidding.

Because marginal cost data are not publicly available, the study introduces a transparent proxy based on the 10th percentile of historical bid prices for each generator. This allows markup-based strategic behavior to be modeled without introducing artificial cost assumptions. Another key contribution is methodological. Initial experiments using classical Q-learning produced unstable markup escalation due to overestimation bias. Transitioning to Double Q-learning stabilized convergence and eliminated artificial price volatility, highlighting the importance of algorithm selection in electricity market applications.

Finally, the model is evaluated using a chronological 80/20 train–test split, ensuring that performance improvements reflect genuine out-of-sample predictive adaptation rather than in-sample overfitting.

**Literature review**

Strategic bidding in day-ahead electricity markets arises from the structure of uniform-price auctions and merit-order dispatch. When demand approaches available capacity, residual demand becomes less elastic, allowing generators to submit bids above marginal cost without losing dispatch. This behavior is a structural feature of electricity markets rather than an anomaly (Biggar and Hesamzadeh, 2014: 281–306).

Equilibrium-based models formalize these incentives using Nash–Cournot frameworks, showing that prices may exceed marginal cost under capacity and transmission constraints (Contreras et al., 2004: 195–206). When operational constraints such as unit commitment are included, the strategic problem becomes dynamic and dependent on generation feasibility (Baíllo et al., 2001: 227–248). However, these models rely on assumptions of full rationality and complete information, which limit their applicability in real market environments (Ventosa et al., 2005: 897–913).

Electricity markets operate as repeated and adaptive systems, where participants adjust strategies based on observed outcomes. Agent-based computational frameworks capture this behavior by modeling markets as evolving systems driven by decentralized interactions (Tesfatsion, 2002: 55–82). In such models, strategies emerge over time rather than being derived analytically (Tesfatsion, 2003: 262–268).

Agent-based simulations allow explicit representation of auction rules and heterogeneous participants, enabling analysis of price dynamics and market power under adaptive conditions (Guerci et al., 2010: 241–286). Platforms such as AMES demonstrate how learning agents interact with realistic clearing mechanisms (Li and Tesfatsion, 2009: 1–8), while dynamic testing shows that market outcomes depend on learning trajectories rather than equilibrium states alone (Sun and Tesfatsion, 2007: 291–327). These approaches establish a foundation for modeling adaptive strategic behavior in electricity markets.

Reinforcement learning provides a natural extension of agent-based approaches by formalizing adaptive bidding as a sequential decision-making process. In this framework, agents update their strategies based on realized profits without requiring explicit knowledge of competitor behavior or cost structures. Early applications of Q-learning to electricity supplier bidding demonstrate that such agents can improve profitability through iterative interaction with the market (Xiong et al., 2002: 1516–1521).

More advanced approaches incorporate probabilistic reasoning and structured learning, allowing agents to operate under uncertainty while maintaining stability (Dehghanpour et al., 2016: 4744–4754). Recent developments in deep reinforcement learning enable continuous bidding strategies and more complex state representations, improving flexibility and scalability (Ye et al., 2020: 1343–1353). Multi-agent reinforcement learning further shows that decentralized learning can approximate equilibrium-like outcomes under competitive conditions (Du et al., 2021: 534–544).

A key direction in recent research is the use of empirically calibrated environments rather than synthetic models. Reinforcement learning applied to realistic market data improves the credibility of results and reduces reliance on artificial assumptions (Di Persio et al., 2025). At the same time, safety-constrained reinforcement learning has been proposed to ensure that learned strategies remain economically and operationally feasible (Stanojev et al., 2023: 1–7). Dedicated simulation environments confirm that reinforcement learning must be evaluated within structured and institutionally consistent market settings (Jain and Saxena, 2023; Schimeczek et al., 2023).

Despite these advances, reinforcement learning models remain sensitive to instability. In particular, value-based methods such as Q-learning are prone to overestimation bias, which can lead to excessive markup strategies in stochastic environments (van Hasselt, 2010: 2613–2621). Addressing this issue is critical for applying reinforcement learning in electricity markets.

The effectiveness of reinforcement learning depends on the interaction between learning algorithms and auction design. Market microstructure influences both efficiency and the extent of strategic behavior (Nicolaisen et al., 2001: 504–523; Bower and Bunn, 2000: 1–29). Therefore, reinforcement learning must be evaluated within the constraints of the clearing mechanism.

Instability in value-based reinforcement learning, particularly overestimation bias, can lead to unrealistic outcomes if not controlled. This has motivated the development of more stable algorithms and constraint-based approaches that limit excessive strategic behavior (van Hasselt, 2010: 2613–2621; Stanojev et al., 2023: 1–7). These findings highlight that reinforcement learning in electricity markets must balance profitability with structural stability.

To clarify the conceptual differences between traditional equilibrium-based approaches and reinforcement learning methods, Table 1 provides a structured comparison across key modeling dimensions.

Table 1 - Comparison between equilibrium-based models and reinforcement learning approaches in electricity market modeling across key methodological and behavioral dimensions

| **Feature** | **Equilibrium Models** | **Reinforcement Learning** | **Ref.** |
|---|---|---|---|
| Behavior assumption | Fully rational agents | Bounded rationality | (Weidlich and Veit, 2008: 1728–1759) |
| Information availability | Full information | Partial / local observations | (Tesfatsion, 2003: 262–268) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Adaptation | Static (one-shot solution) | Dynamic (learning over time) | (Guerci et al., 2010: 241–286) |
| Solution method | Analytical optimization (e.g., Nash) | Iterative learning (trial-and-error) | (Xiong et al., 2002: 1516–1521) |
| Strategic modeling | Explicit equilibrium formulation | Implicit strategy learning | |
| Scalability | Limited for complex systems | High (data-driven) | (Ye et al., 2020: 1343–1353; Du et al., 2021: 534–544) |
| Empirical realism | Often low (stylized assumptions) | High (when using real data) | |
| Uncertainty handling | Limited | Naturally incorporated | |
| Interpretability | High | Moderate | |

As shown in Table 1, reinforcement learning provides a more flexible and adaptive framework for modeling strategic behavior under uncertainty. However, this flexibility comes at the cost of reduced interpretability and potential instability, particularly in value-based methods such as Q-learning.

The proposed framework evaluates adaptive strategic behavior under realistic competitive depth, demand variability, and institutional constraints. Therefore, this work contributes to bridging the gap between theoretical reinforcement learning models and empirically grounded electricity market analysis.

**Model Framework**

**Market Environment.** The simulated environment represents a uniform-price day-ahead electricity market reconstructed from historical KOREM bid-level data. For each delivery day $d$ and hour $h$, the market consists of a set of generators $i \in \{1,\ldots,N\}$, each submitting price-quantity offers.

The use of a uniform-price, merit-order market structure follows the institutional design widely analyzed in electricity market economics (Biggar and Hesamzadeh, 2014: 119–138). Such market structures have been extensively modeled both in equilibrium formulations (Contreras et al., 2004: 195–206) and in agent-based simulation environments (Li and Tesfatsion, 2009: 1–8). The present framework adopts the institutional structure of these markets while embedding it within a reconstructed empirical dataset.

The model does not incorporate transmission constraints, nodal pricing, or unit commitment decisions. This abstraction isolates markup-based strategic behavior within a single clearing zone, consistent with many agent-based electricity market studies that focus on auction dynamics rather than network feasibility (Guerci et al., 2010: 241–286). The omission of intertemporal commitment constraints is deliberate, as strategic unit commitment introduces a substantially more complex bilevel optimization structure (Baíllo et al., 2001: 227–248).

Demand for each hour is derived from historical KOREM data. To avoid deterministic overfitting during training, stochastic multiplicative noise is introduced, scaled according to peak and off-peak regimes. This treatment aligns with the adaptive modeling perspective in which agents interact with a stochastic but institutionally consistent environment rather than a static deterministic schedule (Sun and Tesfatsion, 2007: 291–327).

**Agent Structure and Roles.** The reconstructed market consists of a set of agents corresponding to generators observed in the historical KOREM dataset. Each agent represents an individual market participant submitting price-quantity bids in the day-ahead market. In line with agent-based modeling principles, agents operate independently and make decisions based on local information rather than global system knowledge (Tesfatsion, 2002: 55–82; Tesfatsion, 2003: 262–268).

To isolate the effect of adaptive strategic behavior, agents in the model are divided into two categories: a single strategic learning agent and multiple passive agents.

The strategic agent represents one generator whose bidding behavior is modeled using reinforcement learning. Instead of submitting its historical bid price, this agent applies a markup over its estimated marginal cost and adapts this markup over time to maximize profit. The decision-making process of the strategic agent is based on observed market conditions, including clearing prices, demand

levels, and previous outcomes. This approach reflects adaptive learning behavior commonly studied in electricity market simulations (Ye et al., 2020: 1343–1353; Xiong et al., 2002: 1516–1521).

All remaining agents are modeled as passive participants. These agents submit their historical bids without modification and do not adapt their strategies over time. Their role is to provide a realistic and empirically grounded competitive environment for the strategic agent. By preserving the original bid structure of the market, the model maintains the actual supply stack and competitive depth observed in the real system.

This hybrid agent design, combining one adaptive agent with a population of fixed historical agents, is widely used in agent-based electricity market studies to ensure interpretability and stability of results (Pinto et al., 2013: 335–346; Di Persio et al., 2025). Unlike fully adaptive multi-agent systems, where all participants learn simultaneously, the current approach allows the impact of reinforcement learning on strategic bidding to be evaluated in isolation.

Although simplified, this structure captures the key dynamics of strategic interaction in electricity markets while avoiding the additional complexity and convergence issues associated with multi-agent reinforcement learning frameworks (Du et al., 2021: 534–544; Khamzina et al., 2025).

**Reconstruction of Supply Stack and Clearing Mechanism.** For each hour $h$, all submitted bids are aggregated and sorted in ascending order of offered price. Let $P_{i,h}$ denote the submitted price and $Qi,h$ the offered quantity of generator $i$.

Cumulative supply is constructed as shown in Eq. (1):

$$S_{h(k)} = \sum_{j=1}^{k} Q_{(j),h} \tag{1}$$

The cumulative function $S_{h(k)}$ defines the total available supply up to the $k$-th bid, allowing construction of the aggregate supply curve. Bids are ordered such that:

$$P_{(1),h} \leq P_{(2),h} \leq \cdots \leq P_{(N),h} \tag{2}$$

This ordering represents the merit-order ranking of bids, where lower-priced offers are dispatched first, forming the basis of the supply curve.

The market-clearing price Ph* is determined as the price of the marginal accepted bid satisfying, as shown in (3):

$$S_h(k^*) \geq D_h \tag{3}$$

where $D_h$ is hourly demand. The index $k^*$ identifies the marginal unit required to meet demand $D_h$, determining the cutoff point for accepted bids.

This pay-as-cleared reconstruction reflects the clearing principle implemented in most pool-based electricity markets and studied extensively in computational market test beds such as AMES (Li and Tesfatsion, 2009: 1–8). Auction microstructure has been shown to influence strategic incentives significantly (Nicolaisen et al., 2001: 504–523; Bower and Bunn, 2000: 1–29), and therefore reconstructing clearing endogenously from bids ensures institutional fidelity. By avoiding direct use of published historical clearing prices, the model allows strategic bid modifications to propagate through the same merit-order logic that governs real market outcomes.

**Marginal Cost Proxy.** True generator marginal costs are not publicly available in the dataset. To enable markup modeling relative to cost, a proxy marginal cost $MC_i$ is estimated for each generator $i$ as the 10th percentile of its historical bid prices:

$$MC_i = \text{Percentile}_{10}\{P_{i,h,d}\} \tag{4}$$

This percentile-based proxy (4) assumes that the lower tail of historical bids approximates cost-reflective offers during competitive conditions. Similar empirical approximations have been employed in data-driven electricity market modeling when direct cost data are unavailable (Di Persio et al., 2025).

The approach avoids introducing synthetic cost curves while maintaining empirical grounding in observed bidding behavior.

While this proxy does not represent true fuel or operational cost data, it provides a consistent reference point for modeling markup-based strategic behavior within an empirically reconstructed environment.

**Strategic Agent Structure.** The reconstructed market includes all historical bidders observed in the dataset. However, only one generator is modeled as a strategic reinforcement learning agent. All other participants submit their historical bids unchanged.

This hybrid structure, one adaptive agent embedded within a population of passive participants, follows a common experimental design in agent-based market simulations where the objective is to isolate the behavioral impact of a single learning agent (Pinto et al., 2013: 335–346). The strategic agent replaces its historical price with a markup-based bid defined as in Eq. (5):

$$P_{s,h} = MC_s(1 + m_h) \tag{5}$$

where $m_h$ is the markup selected by the reinforcement learning policy for hour $h$. The offered quantity remains equal to its historical quantity.

This formulation reflects the economic interpretation of strategic bidding as deviation from marginal-cost offers, consistent with equilibrium-based markup logic (Biggar and Hesamzadeh, 2014: 281–306; Contreras et al., 2004: 195–206), but without requiring explicit equilibrium solution.

**Reinforcement Learning Formulation.** The strategic bidding problem is modeled as a sequential decision process. At each hour, the agent observes a state vector incorporating recent clearing prices, demand conditions, and profit outcomes. Such state-based adaptation aligns with reinforcement learning formulations applied to electricity supplier bidding (Xiong et al., 2002: 1516–1521).

The action space consists of discretized markup levels bounded within economically plausible limits. Bounding the action space is essential in auction environments, as unbounded value-based learning may otherwise generate unrealistic escalation behavior, a concern emphasized in reinforcement learning applications to power systems (Stanojev et al., 2023: 1–7).

The reward function is defined as realized hourly profit:

$$R_h = (P_h^* - MC_s) \cdot Q_{s,h}^{accepted} \tag{6}$$

Equation (6) captures realized profit, where revenue depends on the clearing price and accepted quantity, while costs are approximated by the marginal cost proxy. The learning algorithm initially employed classical Q-learning:

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha \left[R + \gamma \max_{a'} Q(s',a') - Q(s,a)\right] \tag{7}$$

The update rule adjusts action values based on observed rewards and estimated future returns, with the maximization term introducing potential overestimation bias. Classical Q-learning has been previously applied to electricity bidding problems (Xiong et al., 2002: 1516–1521; van Hasselt, 2010: 2613–2621). To address this issue, the model adopts Double Q-learning, which separates action selection from value evaluation:

$$Q_1(s,a) \leftarrow Q_1(s,a) + \alpha \left[R + \gamma Q_2(s', \arg\max_{a'} Q_1(s',a')) - Q_1(s,a)\right] \tag{8}$$

By separating action selection and evaluation, this formulation (8) reduces overestimation bias and improves stability in stochastic environments. A symmetric update applies to $Q_2$. Bias reduction mechanisms are particularly relevant in competitive multi-agent contexts where value overestimation may lead to unstable bidding behavior (van Hasselt, 2010: 2613–2621; Du et al., 2021: 534–544).

Exploration follows an ε-greedy schedule with decay during training. After convergence, exploration is disabled during out-of-sample evaluation.

To improve clarity of the proposed framework, the overall workflow of the model is illustrated in Fig. 1. The diagram summarizes the interaction between data input, market reconstruction, and reinforcement learning-based strategic decision-making.

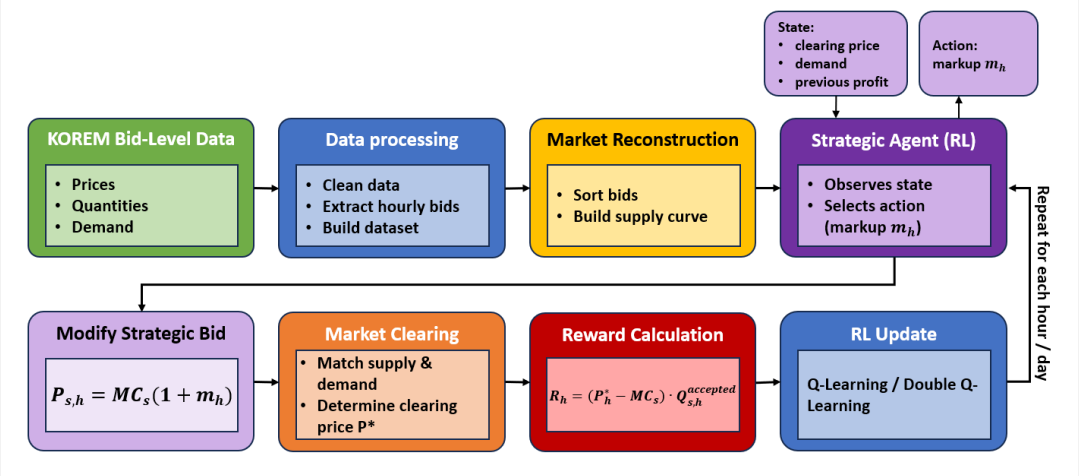



Figure 1: Workflow of the proposed agent-based reinforcement learning framework, illustrating the interaction between real bid-level data, market reconstruction, strategic agent decision-making, and learning through iterative updates

**Training and Evaluation Protocol.** The dataset is divided chronologically into training (80%) and testing (20%) segments. Chronological splitting avoids look-ahead bias and aligns with empirical validation practices in electricity market modeling (Di Persio et al., 2025). The reinforcement learning agent updates its policy sequentially across training days, interacting with reconstructed auction outcomes.

A central contribution of this study is its direct empirical grounding in real day-ahead electricity market data from the Kazakhstan Electricity and Power Market Operator (KOREM). Rather than relying on stylized synthetic datasets or abstracted cost curves, the proposed agent-based framework is constructed from historical bid-level data, allowing strategic adaptation to be evaluated within a realistic institutional and competitive environment.

**Dataset and Market Coverage.** The empirical dataset comprises bid-level submissions from the KOREM day-ahead electricity market covering days between July 2023 and November 2025. This period spans approximately two years of continuous day-ahead market operations, capturing seasonal variation, demand cycles, and heterogeneous bidding behavior across participants.

For each delivery day and hour, the dataset includes individual bidder identifiers, submitted bid prices, offered quantities, delivery hour, and delivery date. In addition, hourly system demand values are available. The dataset therefore enables full reconstruction of the supply curve for each trading hour.

Importantly, historical clearing prices were not directly used in the modeling process. Instead, clearing prices were reconstructed from bid-level data using the official pay-as-cleared mechanism. This approach ensures that any strategic modification of bids produces internally consistent clearing outcomes rather than relying on externally imposed historical prices.

**Reconstruction of Market Clearing.** For each delivery date and hour, the clearing procedure was reconstructed to replicate the pay-as-cleared uniform pricing mechanism used in day-ahead markets. All submitted bids were first aggregated and sorted in ascending order by price. Quantities were cumulatively summed until the total supply equaled or exceeded hourly demand. The price associated with the marginal accepted bid was identified as the market-clearing price for that hour.

This reconstruction ensures that the simulated market clearing process mirrors the actual auction logic of the KOREM day-ahead market. By reconstructing clearing prices rather than importing them directly, the framework allows strategic bid modifications to affect price formation in a structurally consistent manner.

**Marginal Cost Proxy Construction.** True marginal costs of generators are not publicly available within the dataset. To enable modeling of strategic markups over marginal cost, a proxy marginal cost was constructed for each bidder.

For each generator, marginal cost was approximated using the 10th percentile of that bidder's historical bid prices across the dataset. The rationale for this approach is that the lower tail of historical bids likely reflects cost-based offers submitted during periods of low demand or intense competition. Using a percentile rather than the minimum bid avoids distortions caused by occasional anomalous or extreme low-price entries.

This proxy introduces an approximation, as actual production costs are not observed directly. However, it allows strategic markups to be defined relative to empirically grounded bid behavior rather than synthetic cost curves. The implications of this assumption are discussed explicitly in the limitations section.

**Strategic Agent Design within Real Market Environment.** The reconstructed market includes all historical bidders observed in the dataset. However, only one bidder is modeled as a strategic reinforcement learning agent. All remaining participants retain their historical bids unchanged.

This modeling choice results in a hybrid market structure in which the competitive environment is fully empirical, while a single generator adapts its bidding behavior. The strategic agent replaces its historical bid price with a markup-based formulation defined as a function of its proxy marginal cost, while maintaining historically observed quantities. All other bidders act as passive participants, submitting the same prices and quantities recorded historically.

This design isolates the effect of reinforcement learning within a realistic competitive landscape. Because other bidders do not adapt strategically in the simulation, the learning dynamics of the focal agent can be interpreted without multi-agent interaction effects confounding the results.

**Training and Evaluation Protocol.** To prevent look-ahead bias and ensure credible empirical evaluation, the dataset was divided chronologically into training and testing segments. The first 80 percent of delivery days were used for training the reinforcement learning agent. The remaining 20 percent were reserved exclusively for out-of-sample evaluation.

The learning process was conducted sequentially across training days, allowing the agent to update its policy through repeated exposure to historical market conditions. After training convergence was achieved, the learned policy was fixed. Performance evaluation was then conducted on the test subset without further learning or parameter adjustment.

This chronological split ensures that performance improvements reflect genuine predictive adaptation rather than overfitting to future data.

**Reinforcement Learning Implementation.** The strategic agent employs value-based reinforcement learning. Initial implementation used classical Q-learning, a method previously applied to electricity supplier bidding problems (Xiong et al., 2002: 1516–1521; van Hasselt, 2010: 2613–2621). However, classical Q-learning is known to suffer from overestimation bias in stochastic environments, which may lead to aggressive action selection.

To mitigate this issue, the model adopts Double Q-learning, which separates action selection from evaluation and reduces upward bias in value estimation. Bias reduction is particularly relevant in auction-based markets where reward signals depend on stochastic clearing outcomes and competitor behavior.

Exploration is implemented using an ε-greedy policy with gradual decay. During the testing phase, exploration is disabled to evaluate deterministic policy performance.

The reinforcement learning configuration is designed to balance profitability improvement with structural stability, reflecting concerns raised in reinforcement learning applications to power systems regarding convergence and volatility (Stanojev et al., 2023: 1–7).

**Results**

**Baseline Benchmark.** The baseline configuration represents non-adaptive cost-based bidding by the strategic generator, while all other participants submit their historical bids unchanged. Market clearing is reconstructed through the pay-as-cleared merit-order mechanism described earlier, ensuring institutional consistency with wholesale pool markets (Biggar and Hesamzadeh, 2014: 119–138).

Out-of-sample evaluation on the 20% test dataset yields cumulative profit for the strategic agent of:

$$\text{Profit}_{\text{baseline}} = 21{,}491{,}955$$

The average clearing price during the test period equals:

$$P^{-}_{\text{baseline}} = 29.6008$$

These values establish the empirical reference against which reinforcement learning performance is evaluated and are presented in comparison in Table 2.

Table 2 - Out-of-Sample Performance Comparison Between Baseline and RL Configurations

| Metric | Baseline | RL | Change |
|---|---|---|---|
| Total Profit | 21,491,955 | 21,571,138 | +0.37% |
| Mean Clearing Price | 29.6008 | 29.6920 | +0.31% |

**Reinforcement Learning Performance.** Under Double Q-learning, the strategic agent adapts its markup decisions based on realized profit signals and observed market states. Out-of-sample cumulative profit increases to:

$$\text{Profit}_{\text{RL}} = 21{,}571{,}138$$

This corresponds to an absolute improvement of 79,183 monetary units and a relative increase of +0.37%.

Although moderate in percentage terms, such improvements are economically meaningful in wholesale electricity markets operating at large scale. Importantly, the improvement is achieved without extreme markup escalation, reflecting bounded strategic adaptation consistent with residual demand theory (Biggar and Hesamzadeh, 2014: 281–306).

The stabilization achieved through Double Q-learning is particularly relevant given known overestimation bias issues in classical value-based reinforcement learning (van Hasselt, 2010: 2613–2621). Earlier experiments with standard Q-learning produced higher short-run profit gains but introduced instability. The final configuration prioritizes structural plausibility over aggressive exploitation. The comparison between baseline and reinforcement learning performance is illustrated in Fig. 2.

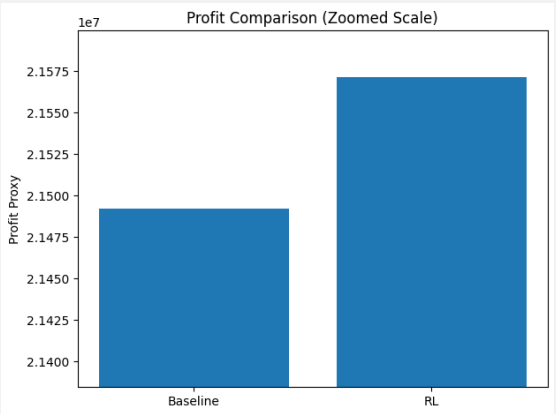



Figure 2: Out-of-sample cumulative profit comparison between baseline and Double Q-learning configurations

**Clearing Price Distribution and Structural Stability.** A critical concern in applying reinforcement learning to auction-based electricity markets is the potential distortion of price distributions. Auction microstructure studies demonstrate that market design strongly influences volatility and efficiency (Nicolaisen et al., 2001: 504–523; Bower and Bunn, 2000: 1–29). Therefore, reinforcement learning performance must be evaluated not only in terms of profit but also in terms of structural stability.

The empirical distribution of clearing prices under both configurations was compared using the reconstructed pay-as-cleared outcomes.

Under Double Q-learning, the distribution remains concentrated within historically observed intervals. No heavy-tailed amplification or abnormal price spikes are introduced. The modal structure associated with peak and off-peak regimes is preserved. Fig. 3 illustrates that reinforcement learning does not distort the overall price distribution.

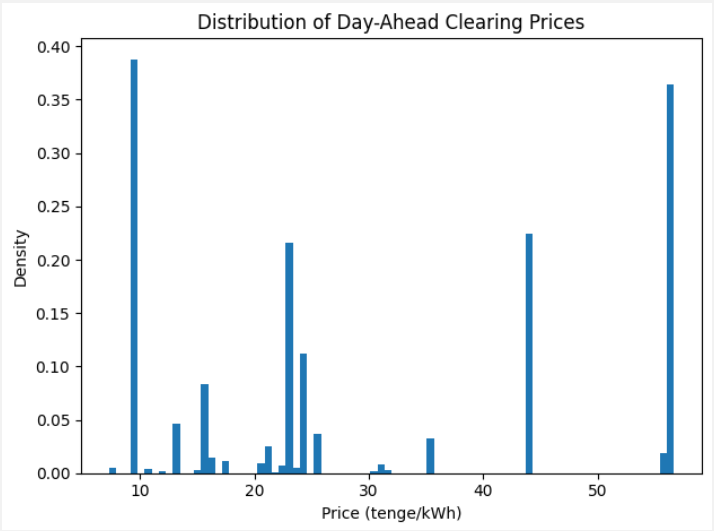



Figure 3: Distribution of day-ahead clearing prices under baseline and RL configurations

**Intraday Price Structure.** Electricity markets exhibit characteristic intraday price patterns driven by demand cycles and supply stack composition (Kabdygali et al., 2023: 16–29). Agent-based market studies emphasize that preserving such temporal structure is essential for institutional realism (Li and Tesfatsion, 2009: 1–8; Sun and Tesfatsion, 2007: 291–327).

The hourly average clearing price profile remains consistent under reinforcement learning. Prices increase during peak demand hours and decline during off-peak periods in both baseline and RL configurations. The RL scenario exhibits slightly elevated prices during peak periods, reflecting targeted markup adjustments.

The preservation of temporal price structure indicates that adaptive bidding operates within merit-order constraints rather than disrupting the institutional clearing logic. This pattern is illustrated in Figure 4.

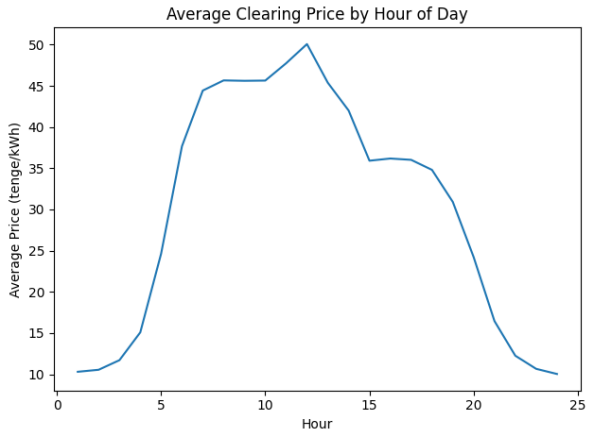



Figure 4: Average clearing price by hour of day

**Strategic Markup Dynamics.** The observed profit improvement is driven by context-dependent markup adaptation. Reinforcement learning increases markups primarily during hours of elevated demand, when residual demand elasticity permits price influence. During low-demand hours, markups remain minimal, reflecting competitive pressure.

This behavior is consistent with strategic bidding patterns predicted in equilibrium analyses (Contreras et al., 2004: 195–206) and observed in adaptive agent-based simulations (Pinto et al., 2013: 335–346). The bounded nature of markup adjustments demonstrates that Double Q-learning successfully mitigates overestimation bias and prevents unstable escalation.

## Discussion

**Interpretation of Results.** The empirical results demonstrate that reinforcement learning can enhance strategic bidding performance within a reconstructed real-world day-ahead electricity market. However, the magnitude and stability of this improvement are strongly constrained by both the competitive structure of the market and the design of the learning algorithm.

The observed improvement in profitability, although moderate, reflects the realistic conditions of the reconstructed environment. Unlike stylized simulations where agents operate in simplified or synthetic settings, the strategic agent in this study interacts with a real bid stack derived from historical data. As a result, the opportunity for profit maximization is limited by the presence of competing bids and the merit-order dispatch mechanism. This indicates that reinforcement learning does not artificially inflate profits, but instead identifies economically feasible opportunities for strategic adjustment.

A key observation is the temporal distribution of markup behavior. The reinforcement learning agent increases markups primarily during peak-demand hours, while maintaining near-zero markups during off-peak periods. This behavior suggests that the agent implicitly learns the concept of residual demand elasticity, exploiting situations where demand approaches available supply. Such behavior is consistent with theoretical expectations from electricity market economics, where market power is most pronounced under capacity constraints (Biggar and Hesamzadeh, 2014: 281–306).

At the same time, the limited increase in average clearing prices indicates that the agent's influence on overall market outcomes remains constrained. This is an important result, as it demonstrates that reinforcement learning-based strategies do not lead to structural distortion of price formation when applied within a realistic institutional framework. The preservation of price distribution and intraday patterns further supports this conclusion.

As electricity trading becomes increasingly automated, stability and interpretability are essential criteria for evaluating learning-based strategies. The findings indicate that empirically grounded market reconstruction and appropriate algorithmic constraints can support adaptive participation without introducing excessive volatility (Azibek et al., 2024: 1749–1762).

## Conclusion

This study evaluated reinforcement learning for strategic bidding in a day-ahead electricity market reconstructed from KOREM bid-level data. One adaptive generator interacted with passive historical participants within pay-as-cleared auctions. Reconstructing clearing outcomes from historical bid stacks preserved competitive depth and institutional structure, providing an empirical basis for evaluating strategic behavior.

The empirical grounding of the model plays a central role in these findings. By reconstructing clearing outcomes directly from bid-level data rather than relying on synthetic supply curves or predefined price series, the framework evaluates adaptive behavior under actual competitive conditions. This ensures that the observed results reflect realistic market dynamics rather than artifacts of simplified modeling assumptions.

Adaptive bidding improved profitability without fundamentally altering price formation in the reconstructed market. The agent increased markups during periods of high demand, while the competitive supply stack constrained excessive price manipulation. Bounded reinforcement learning may support strategic decisions within the existing auction rules.

Double Q-learning increased out-of-sample profit by approximately 0.37% relative to cost-based bidding. Although classical Q-learning produced larger preliminary short-term gains, its unstable markups and clearing prices highlighted the consequences of value overestimation. Separating action selection and evaluation improved convergence and supported bounded, economically plausible bidding.

**References**

Azibek, B., Zhakiyev, N., Kushekkaliyev, A., Zhalgas, A., & Mukatov, B. (2024). Optimal allocation of storage capacity in distribution network for renewable energy expansion. Electric Power Components and Systems, 52(10), 1749–1762. https://doi.org/10.1080/15325008.2023.2276835

Baíllo, A., Ventosa, M., Ramos, A., Rivier, M., & Canseco, A. (2001). Strategic unit commitment for generation in deregulated electricity markets. In B. F. Hobbs, M. H. Rothkopf, R. P. O'Neill, & H.-P. Chao (Eds.), The next generation of electric power unit commitment models (pp. 227–248). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47663-0_13

Biggar, D. R., & Hesamzadeh, M. R. (2014). The economics of electricity markets. John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/9781118775745

Bower, J., & Bunn, D. W. (2000). Model-based comparisons of pool and bilateral markets for electricity. The Energy Journal, 21(3), 1–29. https://doi.org/10.5547/ISSN0195-6574-EJ-Vol21-No3-1

Contreras, J., Klusch, M., & Krawczyk, J. B. (2004). Numerical solutions to Nash–Cournot equilibria in coupled constraint electricity markets. IEEE Transactions on Power Systems, 19(1), 195–206. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2003.820692

Dehghanpour, K., Nehrir, M. H., Sheppard, J. W., & Kelly, N. C. (2016). Agent-based modeling in electrical energy markets using dynamic Bayesian networks. IEEE Transactions on Power Systems, 31(6), 4744–4754. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2016.2524678

Di Persio, L., Garbelli, M., & Giordano, L. M. (2025). Reinforcement learning for bidding strategy optimization in day-ahead energy market. Energy Economics, 149, Article 108673. https://doi.org/10.1016/j.eneco.2025.108673

Du, Y., Li, F., Zandi, H., & Xue, Y. (2021). Approximating Nash equilibrium in day-ahead electricity market bidding with multi-agent deep reinforcement learning. Journal of Modern Power Systems and Clean Energy, 9(3), 534–544. https://doi.org/10.35833/MPCE.2020.000502

Guerci, E., Rastegar, M. A., & Cincotti, S. (2010). Agent-based modeling and simulation of competitive wholesale electricity markets. In S. Rebennack, P. M. Pardalos, M. V. F. Pereira, & N. A. Iliadis (Eds.), Handbook of power systems II (pp. 241–286). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12686-4_9

Jain, P., & Saxena, A. (2023). A multi-agent based simulator for strategic bidding in day-ahead energy market. Sustainable Energy, Grids and Networks, 33, Article 100979. https://doi.org/10.1016/j.segan.2022.100979

Kabdygali, S., Omirgaliyev, R., Tursynbayev, T., Kayisli, K., & Zhakiyev, N. (2023). Deep recurrent neural networks in energy demand forecasting: A case study of Kazakhstan's electrical consumption. Scientific Journal of Astana IT University, 16, 16–29. https://doi.org/10.37943/16YIKA8050

Khamzina, A., Ten, A., Mukatov, B., Assylkhan, A., Omirgaliyev, R., Mankovska, N., & Zhakiyev, N. (2025). Critical analysis of tariff policy and legislative measures for renewable energy development: Medium-term challenges and prospects of Kazakhstan. ES Energy and Environment, 28, Article 1560. https://doi.org/10.30919/ee1560

Li, H., & Tesfatsion, L. (2009). The AMES wholesale power market test bed: A computational laboratory for research, teaching, and training. In 2009 IEEE Power & Energy Society General Meeting (pp. 1–8). IEEE. https://doi.org/10.1109/PES.2009.5275969

Nicolaisen, J., Petrov, V., & Tesfatsion, L. (2001). Market power and efficiency in a computational electricity market with discriminatory double-auction pricing. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 5(5), 504–523. https://doi.org/10.1109/4235.956714

Pinto, T., Praça, I., Vale, Z., Morais, H., & Sousa, T. M. (2013). Strategic bidding in electricity markets: An agent-based simulator with game theory for scenario analysis. Integrated Computer-Aided Engineering, 20(4), 335–346. https://doi.org/10.3233/ICA-130438

Schimeczek, C., Nienhaus, K., Frey, U., Sperber, E., Sarfarazi, S., Nitsch, F., Kochems, J., & El Ghazi, A. A. (2023). AMIRIS: Agent-based Market model for the Investigation of Renewable and Integrated energy Systems. Journal of Open Source Software, 8(84), Article 5041. https://doi.org/10.21105/joss.05041

Stanojev, O., Mitridati, L., Prata, R. D. N. D., & Hug, G. (2023). Safe reinforcement learning for strategic bidding of virtual power plants in day-ahead markets. In 2023 IEEE International Conference on Communications, Control, and Computing Technologies for Smart Grids (SmartGridComm) (pp. 1–7). IEEE. https://doi.org/10.1109/SmartGridComm57358.2023.10333971

Sun, J., & Tesfatsion, L. (2007). Dynamic testing of wholesale power market designs: An open-source agent-based framework. Computational Economics, 30(3), 291–327. https://doi.org/10.1007/s10614-007-9095-1

Tesfatsion, L. (2002). Agent-based computational economics: Growing economies from the bottom up. Artificial Life, 8(1), 55–82. https://doi.org/10.1162/106454602753694765

Tesfatsion, L. (2003). Agent-based computational economics: Modeling economies as complex adaptive systems. Information Sciences, 149(4), 262–268. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(02)00280-3

van Hasselt, H. (2010). Double Q-learning. In J. Lafferty, C. K. I. Williams, J. Shawe-Taylor, R. S. Zemel, & A. Culotta (Eds.), Advances in neural information processing systems 23 (pp. 2613–2621). Curran Associates. https://papers.nips.cc/paper/3964-double-q-learning.pdf

Ventosa, M., Baíllo, A., Ramos, A., & Rivier, M. (2005). Electricity market modeling trends. Energy Policy, 33(7), 897–913. https://doi.org/10.1016/j.enpol.2003.10.013

Weidlich, A., & Veit, D. (2008). A critical survey of agent-based wholesale electricity market models. Energy Economics, 30(4), 1728–1759. https://doi.org/10.1016/j.eneco.2008.01.003

Xiong, G., Hashiyama, T., & Okuma, S. (2002). An electricity supplier bidding strategy through Q-learning. In 2002 IEEE Power Engineering Society Summer Meeting (Vol. 3, pp. 1516–1521). IEEE. https://doi.org/10.1109/PESS.2002.1043645

Ye, Y., Qiu, D., Sun, M., Papadaskalopoulos, D., & Strbac, G. (2020). Deep reinforcement learning for strategic bidding in electricity markets. IEEE Transactions on Smart Grid, 11(2), 1343–1353. https://doi.org/10.1109/TSG.2019.2936142

**МРНТИ 30.17.51**
**DOI: https://doi.org/10.66941/3106-9037/2026/iss3pp32-50**

**А. Калтаев**[1,2], **М. Курмансейт**[3]
*[1]КазНУ им. аль Фараби, Алматы, Қазақстан;*
*[2]Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан;*
*[3]КазНИТУ им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан.*

# РЕАКТИВНО-ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ БАКТЕРИАЛЬНО-ХИМИЧЕСКОГО ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ ПИРИТА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЁТОМ РОСТА И ПРИКРЕПЛЕНИЯ БАКТЕРИЙ

**Калтаев Айдархан,** д.ф.-м.н., проф., директор НИИ «Математика, механика и интеллектуальные технологий», КазНУ им. аль Фараби, Алматы, Казахстан;
E-mail: Aidarkhan.kaltayev@gmail.com; https://doi.org/ 0000-0003-2180-2785
**Курмансейт Максат**, PhD, руководитель НИЛ «Инженерная механика и моделировние», КазНИТУ им. К.Сатпаева, Алматы, Казахстан.
E-mail: kurmanseiit.maksat@gmail.com; https://doi.org/ 0000-0002-5334-6537

**Аннотация**
Разработана одномерная реактивно-транспортная модель бактериально-химического выщелачивания пирита в пористой среде. В единой постановке объединены адвективно-дисперсионный перенос ионов железа(II), железа(III) и планктонных бактерий, рост планктонной и прикреплённых бактериальных популяций, прикрепление клеток к поверхности пирита, их отрыв и отмирание, а также окислительное растворение минерала. Реакционная часть модели построена на основе литературных кинетических зависимостей, описывающих рост бактерий и превращения железа при растворении пирита. Модель включает три уравнения адвекции–дисперсии с реакционными членами и два локальных кинетических уравнения для пирита и прикреплённых бактерий. Сформулированы основные допущения, начальные и граничные условия. Проверка транспортной части по опубликованным экспериментальным данным показывает качественное согласие расчётных и экспериментальных кривых выхода. Возможности модели проиллюстрированы расчётами пространственно-временных распределений бактерий, пирита и железа(II) вдоль колонны. Предложенная модель создаёт основу для согласованного описания переноса биомассы и растворения минерала. Независимая экспериментальная проверка реакционной части и уточнение области применимости модели являются задачами дальнейших исследований.
**Ключевые слова:** бактериально-химическое выщелачивание; пирит; реактивный перенос; пористая среда; кинетика Моно; прикрепление бактерий; окисление железа(II).

**А. Қалтаев**[1,2], **М. Құрмансейт**[3]
*[1]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;*
*[2]У.А. Джолдасбеков атындағы Механики және машинатану институты, Алматы, Қазақстан;*
*[3]Қ.Сәтпаев атындағы ҚазҰҒЗУ, Алматы, Қазақстан.*

# БАКТЕРИЯЛАРДЫҢ ӨСУІ МЕН ПИРИТ БЕТІНЕ ЖАБЫСУЫН ЕСКЕРЕТІН КЕУЕКТІ ОРТАДАҒЫ ПИРИТТІ БАКТЕРИЯЛЫҚ-ХИМИЯЛЫҚ ШАЙМАЛАУДЫҢ РЕАКТИВТІ ТАСЫМАЛДАУ МОДЕЛІ

**Қалтаев Айдархан,** ф.-м.ғ.д., проф., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің «Математика, механика және интллектуальдық технологиялар» ғылыми зерттеу институтының директоры, Алматы, Қазақстан;
E-mail: aidarkhan.kaltayev@gmail.com; https://doi.org/0000-0003-2180-2785

**Құрмансейт Мақсат**, PhD, Қ.Сәтпаев атындағы ҚазҰҒЗУнің «Инженерлік механика және моделдеу» ғылыми зерттеу зертханасының жетекшісі, Алматы, Қазақстан.
E-mail: kurmanseiit.maksat@gmail.com; https://doi.org/0000-0002-5334-6537

**Аннотация**
Кеуекті ортадағы пиритті бактериялық-химиялық шаймалаудың бірөлшемді реактивті тасымалдау моделі әзірленді. Бірыңғай қойылымда темір(II), темір(III) иондары мен планктондық бактериялардың адвективті-дисперсиялық тасымалдануы, планктондық және бетке жабысқан бактериялық популяциялардың өсуі, жасушалардың пирит бетіне жабысуы, одан ажырауы және өлуі, сондай-ақ минералдың тотыға еруі біріктірілген. Модельдің реакциялық бөлігі бактериялардың өсуін және пириттің еруі кезіндегі темірдің түрленуін сипаттайтын әдебиетте келтірілген кинетикалық тәуелділіктер негізінде құрылған. Модель реакциялық мүшелері бар үш адвекция–дисперсия теңдеуін және пирит пен бетке жабысқан бактерияларға арналған екі жергілікті кинетикалық теңдеуді қамтиды. Негізгі жорамалдар, бастапқы және шекаралық шарттар тұжырымдалған. Модельдің тасымалдау бөлігін жарияланған эксперименттік деректер бойынша тексеру есептік және эксперименттік шығу қисықтарының сапалық тұрғыдан сәйкес келетінін көрсетеді. Модельдің мүмкіндіктері бактериялардың, пириттің және темір(II) иондарының колонна бойындағы кеңістіктік-уақыттық таралуын есептеу арқылы көрсетілген. Ұсынылған модель биомассаның тасымалдануы мен минералдың еруін өзара үйлесімді сипаттауға негіз болады. Модельдің реакциялық бөлігін тәуелсіз эксперименттік тексеру және оның қолданылу аясын нақтылау алдағы зерттеулердің міндеттері болып табылады.
**Түйін сөздер:** бактериялық-химиялық шаймалау; пирит; реактивті тасымалдау; кеуекті орта; Моно кинетикасы; бактериялардың жабысуы; темір(II) иондарының тотығуы.

**Kaltayev A.** [1,2], **Kurmanseit M.**[3]
*[1]al-Faraby Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;*
*[2]Dzholdasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan;*
*[3]Satpayev Kazakh National Technical University, Almaty, Kazakhstan.*

## REACTIVE TRANSPORT MODEL OF BACTERIAL–CHEMICAL LEACHING OF PYRITE IN A POROUS MEDIUM ACCOUNTING FOR BACTERIAL GROWTH AND ATTACHMENT

**Aidarkhan Kaltayev**, Dr. of Phys.and Math. Sci., Prof. of Mechanics, Director of the Research Inst. of Math, Mech, and Intellectual Tech, al Faraby KazNU, ORCID 0000-0003-2180-2785;
E-mail: Aidarkhan.kaltayev@gmail.com
**Maxat Kurmanseit**, PhD, Head of the Research Lab. "Engineering Mechanics and Modeling", KazNRTU.
E-mail: kurmanseiit.maksat@gmail.com; ORCID 0000-0002-5334-6537

**Abstract.** A one-dimensional reactive transport model has been developed for bacterial–chemical leaching of pyrite in a porous medium. The coupled formulation integrates the advection and dispersion of ferrous and ferric ions and planktonic bacteria, the growth of planktonic and attached bacterial populations, cell attachment to the pyrite surface, detachment and decay, and oxidative dissolution of the mineral. The reaction component is based on kinetic relationships reported in the literature that describe bacterial growth and iron transformations during pyrite dissolution. The model comprises three advection–dispersion equations with reaction terms and two local kinetic equations for pyrite and attached bacteria. The main assumptions, initial conditions, and boundary conditions are formulated. Assessment of the transport component against published experimental data shows qualitative agreement between simulated and experimental breakthrough curves. The capabilities of the model are illustrated by calculations of the spatial and temporal distributions of bacteria, pyrite, and ferrous iron along the column. The proposed model provides a basis for a consistent description of biomass transport and mineral dissolution. Independent experimental validation of the reaction component and refinement of the model's domain of applicability remain objectives for further research.

**Keywords:** Bacterial–chemical leaching; pyrite; reactive transport; porous medium; Monod kinetics; bacterial attachment; ferrous iron oxidation.

**Введение**

Метод бактериально-химического выщелачивания сульфидных минералов в последние десятилетия стал важной альтернативой традиционным пирометаллургическим процессам как энергоэффективный и относительно экологически чистый метод. Данный способ приобретает особое значение при извлечении металлов из руд непосредственно в местах залегания руд, в том числе на глубине, из забалансовых руд, а также из балансовых месторождений в отдаленных районах. Также преимущества метода заключаются в низких энергетических затратах, отсутствии крупных выбросов и возможности переработки низкосортных и труднообогатимых бедных руд (Каравайко и др. 1989; Petersen and Dixon 2007; Rawlings and Johnson (2007); Schippers et al. 2013; Abhilash and Pandey 2013; Watling 2015; Kaksonen et al. 2018; Jones and Santini 2023). Уже много лет метод используется для добычи меди и урана в целом ряде стран. Показано, что выщелачивания сульфидных соединений меди в присутствии бактерий возрастает в 7-18 раз, арсенопирита и сфалерита – в 7 раз, никеля и кобальта – в 1.5-2.5 раза, а расход серной кислоты при этом снижается в 2.5-5 раз (Каравайко и др. 1989).

Дело в том, что многие металлы и минералы (соединений меди, урана, никеля и кобальта и др.) из сульфидных руд можно извлекать методом подземного скважинного выщелачивания (ПСВ) или кучного выщелачивания (КВ), переводя минералы из твердого в жидкое состояние путем эффективного окисления их ионами железаIII ($Fe^{+3}$ ). Перевод минералов в жидкое состояние производится по реакции:

$$MeS_{(тв)} + 2Fe^{3+} + 2H^{+} \rightarrow химический \rightarrow Me_{(ж)}^{2+} + H_2S^{+} + 2F^{2+}. \quad (а)$$

Ионы трехвалентного железаIII также быстро окисляют и растворяют оксиды четырехвалентного урана по реакции

$$UO_{2(тв)} + 2Fe^{3+} \rightarrow UO_2^{2+} + 2Fe^{2+},$$

тогда как $UO_{2(тв)}$ очень медленно растворяется серной кислотой.

После растворения соединения металлов эффективно извлекаются из пластов методами ПСВ или из кучи методами фильтрации. Однако для поддержания реакции (а) ионы железаIII ($Fe^{3+}$) должны быть получены по следующей реакцией

$$2Fe^{2+} + 0.5O_2 + 2H^{+} \rightarrow химический \rightarrow 2Fe^{3+} + H_2O, \quad (б)$$

которая является медленной, лимитирующий процесс выщелачивания, реакцией при кислотности среды pH < 2. Вместе с тем, использование железоокисляющих бактерий, типа *Acidithiobacillus ferrooxidans* (*At. ferrooxidans*) и *Leptospirillum ferrooxidans* (*L. ferrooxidans*), как катализаторов, по реакции

$$2Fe^{2+} + 0.5O_2 + 2H^{+} \rightarrow бактерий \rightarrow 2Fe^{3+} + H_2O,$$

увеличивает скорость реакций (б) в $10^5$ -$10^6$ раз, существенно ускоряя процесс выщелачивания (Singer and Stumm 1970; Jones and Kelly 1983; Eligwe 1988; Каравайко и др. 1989; Evangelou and Zhang 1995; Ehrlich и др. 2004; Rawlings 2007**)**. Связано это с тем, что образовавшиеся в результате окисления сульфидных минералов (и оксида урана) ионы железаII являются электрон-донорами – источниками энергии – для бактерии. Железоокисляющие бактерий, получая электрон из ионов железаII, регенерируют ионы железаIII и процесс окисления минералов ионами железаIII повторяется. В этом процессе очень важно наличие пирита (дисульфида железа FeS2**)**, как источника ионов железаII. Данный процесс называется *биохимическим выщелачиванием минералов*, в котором растворение твердой сульфидной руды происходит путем химических реакций, катализируемых железоокисляющими бактериями.

Наибольший интерес из автотрофных бактерий, находящихся в рудах в количествах до $10^9$ клеток на 1 грамм руды, которые живут за счет потребления неорганических веществ, представляют тионовые железобактерии *Acidithiobacillus ferrooxidans* (*A.ferrooxidans*), *Acidithiobacillus thiooxidans* (*A. thiooxidans*), *Leptospirillum ferrooxidans* (*L. ferrooxidans*) – одноклеточные палочковидные организмы диаметром около 0,25 мкм и длиной 1-1.5 мкм с плотностью слегка больше плотности воды. Тионовые бактерии приспособились жить в кислых средах (*pH*=1.5-3) и температуре от 5 до 80° С, максимальная бактериальная активность

наблюдается при 25–35 °C. Бактерии *A. ferrooxidans* способны окислять как ионы железа(II) $Fe^{2+}$, так и элементарную серу и сульфиды (например, пирит, $FeS_2$), *L. ferrooxidans* окисляют только $Fe^{2+}$, но не серу и серосодержащие соединения (Tributsch 2001). *A. thiooxidans* окисляют только элементарную серу (*S*) и поддерживают высокую кислотность среды.

Метод бактериально-химического (биохимического) выщелачивания основан на способности микроорганизмов, преимущественно хемолитотрофных кислотофильных железобактерий, ускоренно окислять сульфидные минералы (например, пирит) и переводить их из нерастворимой сульфидной формы в растворимую сульфатную, образуя соединения типа $FeSO_4$, $Fe_2(SO_4)_3$ (Lundgren and Silver 1980; Jones and Kelly 1983; Каравайко и др. 1989; Petersen and Dixon 2007; Abhilash and Pandey 2013; Johnson 2014; Watling 2015; Jones and Santini 2023).

С точки зрения инженерии химических процессов, поведение системы бактериально-химического выщелачивания минералов, в частности пирита, из пористой среды определяется взаимодействием ряда ключевых факторов (Murr and Berry 1976; Sand et al. 1995; Rohwerder and Sand 2007; Petersen 2010; Schippers 2013):

- морфологии и физико-химических свойств минералов;
- плотности и состава бактериальных популяций;
- концентрации дисульфида железа(II) (пирита), *pH* среды и кислорода;
- пространственно-временной динамики прикрепления бактерий к поверхности пирита и их роста;
- переноса бактерий в пористой среде, их взаимодействие с пиритом и др.

Оценка оптимальных условий для эффективной организации процесса биовыщелачивания пирита – далеко нетривиальная задача и ее невозможно выполнить на основе только предыдущего опыта оператора. Эта задача требует использования детальной математической модели, которая учитывает описанную выше сложную динамику и взаимодействие горных пород и бактерий. В связи с высокой сложностью этих взаимосвязей разработка адекватных моделей и симуляционных инструментов для описания и прогнозирования процессов бактериально-химического выщелачивания минералов приобретает всё большее значение. Такие модели позволяют анализировать влияние ключевых параметров на процесс выщелачивания, оптимизировать условия их протекания и повысить эффективность извлечения металлов в промышленных масштабах (Kargi and Weissman 1987; Konishi et al. 1990; Crundwell 2000; Petersen and Dixon 2007: Ahfir et al. 2016; Saldaña 2023).

Таким образом, цель данного исследования – разработать и обосновать одномерную реактивно-транспортную модель бактериально-химического выщелачивания пирита в пористой среде, объединяющую перенос растворённых форм железа и бактерий, рост бактериальных популяций, прикрепление и отрыв клеток и окислительное растворение минерала.

**Кинетика биохимического выщелачивания пирита и ее модели**

В процессе бактериально-химического выщелачивания сульфидных минералов пирит играет ключевую роль как первичный источник ионов железа(II) ($Fe^{2+}$) – электрон-доноров для бактерий. Дело в том, что пирит, который не растворяется в серной кислоте, подвергается воздействию ионов железа(III) ($Fe^{3+}$) и окисляется до ионов железа(II) и растворяется. Роль микроорганизмов в процессе биохимического выщелачивания в основном является промежуточной (непрямой) и заключается в окислении ионов железа(II) до ионов железа(III). Получаемые при этом ионы железа(III) снова окисляют молекулы пирита, переводя их из твердой в жидкую форму (Sand et al. 2001; Rawlings 2001, 2007; Petersen et al. 2007; Schippers et al. 2013; Abhilash and Pandey 2013).

За последние несколько десятков лет механизмы бактериального окисления пирита были тщательно изучены и результаты обсуждались и суммировались во множестве статей: (Ehrlich 1964; Singer and Stumm 1970; Murr and Berry 1976; Lundgren and Silver 1980; Jones and Kelly 1983; Eligwe 1988; Lizama and Suzuki 1989; Evangelou and Zhang 1995; Schippers et al. 1996; Boon et al. 1999; Crundwell et al. 2000; Ojumu 2006; Rawlings 2007; Petersen 2010; Choi et al. 2017 и др.). Установлено, что биохимическое окислительное растворение пирита реализуется через две основные стадии.

На первой стадии происходит окисление ионов железа(II) бактериями с получением ионов трехвалентного железа(III) по реакции

$$2\,Fe^{2+} + 0.5O_2 + 2H^+ \rightarrow A.\,ferrooxidans,\ L.\,ferrooxidans \rightarrow 2Fe^{3+} + H_2O, \quad (1)$$

На второй стадии происходит химическое окислительное растворение пирита ионами железа(III)

$$FeS_2 + 14Fe^{3+} + 8H_2O \rightarrow 15Fe^{2+} + 16H^+ + 2SO_4^{2-}, \quad (2)$$

возвращая ионы железа(II) в раствор, так как ионы железа(III) является сильным окислителем в кислых растворах и может напрямую окислять пирит и другие сульфиды.

Известно, что реакция (1) является лимитирующей стадией абиотического окисления пирита и скорость реакции (1) при $pH$ <3 в присутствии *A. ferrooxidans* увеличивается примерно в $10^5$ - $10^6$ раз по сравнению с абиотическим окислением железа(II) (Singer and Stumm 1970; Jones and Kelly 1983; Eligwe 1988; Каравайко и др. 1989; Evangelou and Zhang 1995; Ehrlich 2004 и др.).

В работах Stokes (1970), Lundgren and Silver (1980), Ehrlich (1981), Lizama and Suzuki (1989) утверждается, что полное окисление пирита до сульфата трехвалентным железом по реакции (2) требует жестких условий, а в мягких условиях бактериального выщелачивания более вероятной будет реакция частичного окисления пирита до элементарной серы

$$FeS_2 + 2Fe^{3+} \rightarrow 3Fe^{2+} + 2S^0. \quad (3)$$

В результате реакций (2) или (3) образуется дополнительное количество ионов железа $Fe^{2+}$, которые используются бактериями в качестве доноров электронов (источника энергии) при их окислении до $Fe^{3+}$ по реакции (1). Таким образом, система реакций (1) – (2) или (1) – (3) является самоподдерживающейся благодаря присутствию железо- и сероокисляющих бактерий.

Присутствие бактерий *A. thiooxidans* в инокуляте, окисляя элементарную серу ($S^0$) по реакции

$$S^0 + 1.5\,O_2 + H_2O \rightarrow A.\,thiooxidans \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-},$$

поддерживают высокую кислотность среды, что предотвращает выпадение сульфатов железа в осадок и стабилизирует $Fe^{3+}$ в растворе (Schippers and Sand 1999; Rawlings and Johnson 2007; Johnson and Hallberg 2003). Кроме того, с повышением концентрации серной кислоты, т.е. с увеличением ионной силы раствора, заряд поверхности бактерий становится положительным, что позволяет преодолеть энергетический барьер и предотвращать отрыв бактерий от отрицательно заряженной поверхности пирита (Bradford et al. 2013; Choi et al. 2017; Jain and Arnepalli 2020; Saldana 2023).

В случае биодобычи урана ситуация несколько иная **(**Abhilash, Pandey, 2013; A. Patra et al, 2011). Этот металл не образует сульфидную фазу, а встречается в виде минерала уранинита ($UO_2$), который часто ассоциируется с месторождениями пирита. Трехвалентное железо, образующееся в результате биологически катализируемого окислительного растворения сульфидов железа, окисляет нерастворимый $UO_2$ (иногда называемый четырехвалентный уран U(IV)) до растворимого $UO_2^{2+}$ (называемый шестивалентный уран U(VI)),

$$UO_2 + 2Fe^{3+} \rightarrow UO_2^{2+} + 2Fe^{2+},$$

$$(UO_2 + Fe_2(SO_4)_3 \rightarrow UO_2SO_4 + 2FeSO_4),$$

который затем может быть извлечен путем ионнообменного процесса.

Следует отметить, что реакции (1), (2) и (3) не являются элементарными, поэтому их скорости не обязаны подчиняться закону действующих масс (Evangelou, 1995).

Бактерии *A.ferrooxidans, L. ferrooxidans* могут размножаться и, соответственно, выщелачивать минерал, как при непосредственном контакте с поверхностью пирита и прикреплении к ней, так и во взвешенном планктонном состоянии (Konishi и др. 1990; Tributsch 2001; Rawlings 2002**;** Gleisner et al. 2006**).**

Большинство кинетических выражений для скорости роста биомассы, сопровождающегося окислением ионов железа(II) бактериями с образованием ионов железа(III) по уравнению (1), основаны на модели роста микроорганизмов типа Моно (Liu et al. 1988; Nemati et al. (1998); Karamanev 1991; Rittmann and VanBriesen 1996; Boon et al. 1998; Ojumu et al. (2006); Petersen and Dixon 2007 и др.):

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{max}[Fe^{2+}]}{K_s + [Fe^{2+}]}X = \mu X, \qquad \mu = \frac{\mu_{max}[Fe^{2+}]}{K_s + [Fe^{2+}]}, \quad (4)$$

где $X$ – суммарная массовая концентрация (или количество) планктонных и прикреплённых к поверхности пирита бактерий, $M_xL^{-3}$, $[Fe^{2+}]$ – массовая концентрация ионов железа(II) – электрон-донора, $M_sL^{-3}$, $\mu$ – удельная скорость роста бактерий, $T^{-1}$, $\mu_{max}$ – максимальная удельная скорость роста бактерий, $T^{-1}$, $K_s$ – константа, равная концентрации ионов железа(II), при которой скорость роста бактерий равна половине максимальной скорости роста $\mu_{max}$, $M_sL^{-3}$. Возможные значения констант $\mu_{max}$ и $K_s$ приведены в Таблице 1.

По данным Chang и Myerson (1982) и Karamanev (1991), скорость роста биомассы имеет одинаковую зависимость от концентрации $Fe^{2+}$ для планктонных и прикреплённых бактерий

$$X = X_a + X_p\,, \qquad \frac{dX}{dt} = \frac{dX_a}{dt} + \frac{dX_p}{dt},$$

$$\frac{dX_a}{dt} \sim R_a = k_a \mu X_a, \tag{5}$$

$$\frac{dX_p}{dt} \sim R_p = k_p \mu X_p, \tag{6}$$

где $X_a$ – массовая концентрация прикрепленных (адсорбированных) к поверхности пирита бактерий, $X_p$ – массовая концентрация взвешенных в жидкости бактерий в планктонной форме, $X_a + X_p = X$, $k_a$ и $k_p$ – коэффициенты скорости роста прикрепленных и взвешенных в жидкости бактерий. Вместе с тем рост биомассы прикреплённых бактерий, в отличие от свободно взвешенных, определяется также концентрацией пирита на поверхности пор и морфологией его частиц.

На основании экспериментальных наблюдений многие авторы предполагают» принимается, что скорость роста бактерий, прикреплённых к поверхности пирита бактерий пропорциональна доступной площади поверхности пирита, не занятой бактериями (Gannon et al. 1991; Kargi 1984; Konishi et al. 1990; Tan et al. 1994; Gharabaghi et al. 2015; Bai et al. 2016; Sang et al. 2023; Saldaña 2023)

$$dX_a/dt \sim R_a = k_a\, \mu X_a (X_S - X_a)/X_S\,, \tag{7}$$

где $k_a$ – константа адсорбции, $X_S$ – максимальная способность бактерий прикреплению к поверхности. Удельная скорость роста адсорбированных бактерий $\mu_A$ была оценена и составила 2,5 сут$^{-1}$ для всех экспериментальных исследований (Konishi et al. 1990).

Аналогично, скорость роста бактерий в жидкой фазе пропорциональна числу взвешенных в жидкости клеток на объемную долю жидкости в пористой среде – пористости $\varphi$

$$dX_p/dt \sim R_p = \mu_p X_p\, \varphi\ .$$

Если при окислении пирита осадки железа не образуются, тогда по реакции (1) скорость окисления ионов железа(II) равна чистой скорости образования ионов железа(III)

$$-\frac{d[Fe^{2+}]}{dt} = \frac{d[Fe^{3+}]}{dt}\,. \tag{8}$$

Имея в виду, что часть потребляемой бактериями энергии (в виде электронов в результате окисления ионов железа(II)) идёт на рост клеток, а часть энергии расходуется на поддержание их жизнедеятельности (дыхание, транспорт ионов, репарация ДНК и т.д.), Пиртом (Pirt 1982) предложено стехиометрическое соотношение между потреблением ионов железа(II) и ростом бактерий

$$-\frac{d[Fe^{2+}]}{dt} = \frac{1}{Y_{X/S}}\frac{dX}{dt} + m_S X, \tag{9}$$

где $Y_{X/S}$– коэффициент выхода биомассы на массу потребленного $[Fe^{2+}]$ – стехиометрическое соотношение между массой использованных ионов двухвалентного железа и массой образовавшимися бактериями (mol $X$ / mol $Fe^{2+}$), $m_S$ – количество ионов железа(II), необходимое в единицу времени для поддержания 1 моля бактерий. Согласно Пирту, значения $Y_{X/S}$ и $m_S$ являются константами для данного бактериального штамма, растущего на определённом субстрате. Экспериментально определенные значения констант $Y_{X/S}$ и $m_S$ приведены в Таблице 1.

В экспериментальной работе (Boon 1996; M. Boon and Heijnen 1998; Van Scherpenzeel et al. 1998) было обнаружено, что скорость химического окисления пирита бактериями *L.ferrooxidans* увеличивается с увеличением соотношения концентраций трехвалентного и двухвалентного железа и удельная скорость пирита достигает максимума при высоких (>15000) значениях $[Fe^{3+}]/[Fe^{2+}]$. Утверждается, что эмпирическое кинетическое уравнение

$$\frac{1}{[FeS_2]}\frac{d[FeS_2]}{dt} = \nu_{FeS_2} = -\frac{\nu_{FeS_2}^{\max}}{1+\frac{B[Fe^{2+}]}{[Fe^{3+}]}} = -\frac{\nu_{FeS_2}^{\max}\,[Fe^{3+}]}{[Fe^{3+}]+B[Fe^{2+}]} \quad (10)$$

адекватно описывает кинетику химического окисления пирита трехвалентным железом при B=2200, $\nu_{FeS_2}^{\max} = 6.7 \text{ x } 10^{-3}\ h^{-1}$.

Авторами работы Chang and Myerson (1982**)** было обнаружено, что скорость бактериального выщелачивания увеличивается с увеличением площади поверхности пирита, концентрации $Fe^{2+}$ на входе и уменьшается с увеличением скорости разбавления.

По-видимому, ингибирование ионом железа не является столь значимым фактором, как предполагалось ранее, и что контроль скорости процесса со стороны доступности иона железа имеет большее значение (Ojumu et al. 2006).

С повышением концентрации серной кислоты и увеличением ионной силы раствора заряд поверхности становится положительной, что предотвращает отрыв бактерий от отрицательно заряженной поверхности пирита.

Концентрация трехвалентного железа $Fe^{3+}$ ниже 8 г/л практически не влияет на скорость окисления двухвалентного железа $Fe^{2+}$ прикрепленными и свободно взвешенными клетками T. ferrooxidans (Nikolov and Karamanev 1984; Karamanev and Nikolov 1988);

Значения $Y_{X/S}$ для бактерий *Leptospirillum ferrooxidans* (в непрерывном реакторе) лежат пределах (0.0059 - 0.0074) ммоль $C$ (углерод)/ммоль $Fe^{2+}$, коэффициент поддержания жизнедеятельности бактерий $m_S$ – в пределах 0.7970 ммоль $Fe^{2+}$/(ммоль $C \cdot$ ч).

$$\frac{dX}{dt} = -Y_{X/S}\frac{d[Fe^{2+}]}{dt}, \quad (11)$$

где$Y_{X/S}$ =– коэффициент выхода биомассы на массу $[Fe^{2+}]$ (Van Scherpenzeel et al. 1998; A. Rashidi et al., 2012; 2014)

$$Y_{X/S} = 2.25 \text{ x } 10^{\,9}\text{cells}/(\text{g} - \text{Fe}^{2+}) . \quad (12)$$

Ниже в Таблице 1 приведены типичные параметры кинетики биохимического выщелачивания пирита.

Таблица 1 – Типичные параметры кинетики биохимического выщелачивания пирита

| Параметр | Обозначение | Типичные значения | Источник |
|---|---|---|---|
| Макс. удельная скорость роста бактерий – константа Моно | $\mu_{max}$ | 0.38 $h^{-1}$<br>0.09–0.12 $h^{-1}$<br>0.11–0.12 $h^{-1}$<br>0.104 $h^{-1}$<br>0.35 $h^{-1}$ | Gaudy et al. (1980)<br>Chang & Myerson (1982),<br>Liu et al. (1988),<br>Konishi (1990)<br>Chang et al. (1991) |
| Константа полунасыщения по Моно | $K_S$ | 1.1 $g/L$<br>2 $g/L$ | Gaudy et al. (1980)<br>Corapcioglu & Haridas (1985) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 0.09-0.22 $g/L$<br>0.1–0.5 $mM$<br>8 $g/L$<br>2.5 $g$ /$L$ | Liu et al. (1988)<br>Karamanev (1991)<br>Chang et al. (1991)<br>Rashidi et al (2012) |
| Коэффициент выхода биомассы на массу потребляемого $[Fe^{2+}]$ | $Y_{X/S}$<br>$Y_{max}$<br>$Y_{X/S}$<br>$Y_{X/S}$<br>$Y_{X/S}$<br>$Y_{X/S}$<br>$Y_{X/S}$ | 0.083–0.3 g $X$ /g-$S$<br>0.38 g $X$ /g-$Fe$<br>0.3-0.7 g $X$ / g-$Fe^{2+}$<br>0.5 g $X$ / g-$Fe^{2+}$<br>24 g/mol<br>0.01–0.011 mmol $C$ / mmol $Fe^{2+}$<br>2 x$10^{10}$ cells/(g-$Fe^{2+}$) | Pirt (1965) (anaerobic)<br>Jones & Kelly (1983) *A. ferrooxidans* (continuous)<br>Corapcioglu & Haridas (1984)<br>Chang et al. (1991)<br>Zysset (1994)<br>Van Scherpenzeel (1998) *L. ferrooxidans* (continuous)<br>Molchanov et al. (2007) |
| Коэффициент выхода биомассы: *в жидкости* на массу потребляемого [$Fe^{2+}$]; *на поверхности пирита* на массу потребляемого [$FeS_2$] | $Y_{X/S}$<br>$Y_l$<br>$Y_a$ | 2.25 x $10^9$ cells/(g-$Fe^{2+}$)<br>3.49 x $10^{10}$ cells/(g-F$e^{2+}$)<br>3.3 x $10^{11}$ cells/(g-$FeS_2$) | Rashidi et al. (2012)<br>Konishi (1990)<br>Konishi (1990) |
| Количество энергии для поддержания жизнедеятельности бактерий | $m_S$<br>$m_{Fe^{2+}}$<br>$m_{Fe^{2+}}$ | 0.3-0.47 g S / (g DW h)<br>0.04 g $Fe$/(g сух.вес ·h)<br>0.8 mmol $Fe^{2+}$ / (mmol $C$·h)<br>0.013–0.44 mmol $Fe^{2+}$ /(mmol $C$·h) | Pirt (1965) (anaerobic)<br>Jones & Kelly (1983) *A. ferrooxidans* (continuous)<br>Boon (1996) *A. ferrooxidans* (batch)<br>Van Scherpenzeel (1998) *L. ferrooxidans* (continuous) |
| Удельная скорость окисления пирита, [$FeS_2$] g/l = 2-50 | $\nu_{FeS2}^{max}$<br>$B$ | 4.8-7.7 x $10^{-3}$ $h^{-1}$<br>2200 | *B.* M. Boon, J.J. Heijnen, 1998 |
| Поверхностная концентрация бактерий | $C_0$ | $10^{-3}$ $kg/L$ | Corapcioglu & Haridas (1985) |
| Поверхностная концентрация субстрата ($Fe^{2+}$) | $C_{F0}$ | $10^{-3}$ $kg/L$ | Corapcioglu & Haridas (1985) |

Железоокисляющие бактерии имеют плотность близкую к плотности воды, поэтому обладают нейтральной плавучестью и, как правило, не оседают. Гравитационное осаждение играет значительную роль только в захвате относительно крупных частиц (>5мкр).

Одним из ключевых этапов биовыщелачивания является прикрепление бактерий к поверхности минералов с образованием биоплёнок. Как показали многочисленные исследования, клетки *Acidithiobacillus ferrooxidans* и родственных видов преимущественно прикрепляются к отрицательно заряженным участкам сульфидных минералов (например, трещинам, дислокациям, границам зёрен), используя внеклеточные полисахариды (EPS), содержащие комплексированные ионы $Fe^{3+}$, которые обеспечивают электростатическое взаимодействие с минералом [Gehrke et al. (1998); Rohwerder et al. (2003); Vera et al. (2013)].

Прикрепление бактерий к поверхности пирита имеет важное значение. Согласно данным [Gehrke et al. (1998); Vera et al. (2013)], до 80–90% клеток адсорбируется в течение первых суток, при этом покрытие поверхности может достигать 20–45%. Процесс прикрепления описывается кинетикой второго порядка с константой $k_a$, а десорбция — константой $k_d$ ($\sim 10^{-3}$–$10^{-2}$ $с^{-1}$) [Eligwe (1988); Boon & Heijnen (1998)]. Удержание клеток усиливается в дефектах поверхности пирита и зонах дислокаций. Концентрация инокулята *A. Ferrooxidans* в $10^7$–$10^8$ клеток/мл является оптимальным при прикреплении к поверхности [Dziurla et al. (1998)]. Прикрепление зависит от заряда и энергии поверхности: пирит имеет низкую поверхностную энергию по сравнению с органической матрицей угля [Bagdigian & Myerson (1986)].

Скорость роста адсорбированных к поверхности пор бактерий можно предположить пропорциональной произведению числа адсорбированных клеток на долю твердой поверхности, не занятой клетками (Konishi et al,1990). В работе [Myerson and Kline (1984)] отмечается, что *T. ferrooxidans* необратимо адсорбируется на частицах угля, и скорость адсорбции можно смоделировать с помощью необратимой реакцией второго порядка вида: $dX_p/dt = -kX_pS$ , где $S = A_t/V$ , $A_t$ – общая площадь твердой поверхности в реакторе ($м^2$), $k$ – константа.

По измерениям в работе [Eligwe (1988); Boon & Heijnen (1998)] коэффициент десорбции бактерий $k_d$ имеет порядок $10^{-3}$–$10^{-2}$ $с^{-1}$, увеличивается при усилении касательного напряжения потока и при высоких $[Fe^{3+}]/[Fe^{2+}]$.

Анализ других источников также показывает, что

– скорость прикрепления взвешенных бактерий подчиняется кинетике первого порядка по концентрации этих частиц, т.е.

$$k_c \phi X_p,$$

где $k_c$ есть коэффициент прикрепления взвешенных бактерий, $\phi$ – пористость среды **[**Herzig et al. (1970); Corapcioglu and Haridas (1984); S. Taylor and P. Jaffe (1990)];

– скорость отрыва (удаления) прикрепленных бактерий от поверхности сдвиговыми силами жидкости определяется как

$$k_d(\phi_{X_a})^h X_a ,$$

где $k_d$ – константа десорбции (отрыва), зависящая от $X_p$ и модуля скорости фильтрационного потока $u = |\vec{u}|$, увеличивается при усилении касательного напряжения потока и при высоких $[Fe^{3+}]/[Fe^{2+}]$; $h$ – эмпирическая константа; $\phi_{X_a}$ – объемная доля биопленки [Corapcioglu и Haridas (1984); Eligwe (1988); Boon & Heijnen (1998)];

– скорость прикрепления бактерий к твердой поверхности, которая зависит от количества взвешенных бактерий в жидкости и площади поверхности, доступной для прикрепления, выражается как [Kargi (1984); Corapcioglu & Haridas (1985); Zysset (1994)]

$$dX_a/dt \sim k_a X_p (X_s - X_a)/X_s,$$

где $k_a$ – скорость прикрепления, $X_s$ – концентрация насыщения прикрепляемых бактерий (максимально возможное количество прикрепляемых бактерий). Доля покрытия поверхности пирита биоплёнкой коррелирует с потерей проницаемости.

Количество прикреплённых клеток и скорость их адгезии также зависят:

- от плотности инокулята,
- от природы поверхности (заряд, дефекты),
- от состава EPS бактерий (и содержания $Fe^{3+}$ в них),
- от условий среды (*pH*, концентрации железа, время контакта).

Ниже в Таблице 2 приведены экспериментальные константы скорости адсорбции-десорбции бактерий к поверхности пирита.

Таблица 2 – Экспериментальные константы скорости адсорбции-десорбции бактерий к поверхности пирита

| | | | |
|---|---|---|---|
| Скорость прикрепления взвешенных частиц | $k_c$ | $R_d = k_c \phi X_p$<br>6.5 x $10^{-3}$ $s^{-1}$ | (Herzig et al. (1970); Corapcioglu and Haridas (1984); S. Taylor and P. Jaffe (1990) |
| Скорость прикрепления бактерий<br>Мелкий песок, E. coli | $k_a$<br>$k_{att}$ | $10^{-3}$–$10^{-2}$ $s^{-1}$<br>3.3 x $10^{-3}$$s^{-1}$<br>3 x $10^{-4}$ - 3 x $10^{-3}$ $s^{-1}$ | Myerson & Kline (1984)<br>Clement et al (1997)<br>Bai (2016) |
| Скорость адсорбции | $k_a$<br>$k_a$ | 6.2 x$10^{-5}$ $s^{-1}$<br>3.1 x$10^{-5}$ $s^{-1}$ | Zysset (1994)<br>Chang et al. (1991) |
| Скорость закупоривания (straining) пор бактериями<br>Мелкий песок, E. coli | $k_c$<br>$k_{str}$ | 6.5 x $10^{-3}$ $s^{-1}$<br>7.6 x $10^{-4}$ $s^{-1}$ | Corapcioglu & Haridas (1985)<br>Bai (2016) |
| Скорость открепления бактерий<br>Мелкий песок, E. coli | $k_d$ | 1.7 x $10^{-3}$ $s^{-1}$ | Bai (2016) |
| Скорость десорбции бактерий | $k_d$<br>$k_r$ | $10^{-3}$–$10^{-2}$ $s^{-1}$<br>4 x $10^{-4}$ $s^{-1}$ | Eligwe (1988);<br>Boon & Heijnen (1998)<br>Chang et al. (1991) |
| Скорость сноса бактерий | $k_y$ | 4.35 x $10^{-4}$ $s^{-1}$ | Corapcioglu & Haridas (1985) |
| Скорость отмирания бактерий | $k_d$<br>$k_d$ | 1 x $10^{-6}$ $s^{-1}$<br>1.2x$10^{-7}$ $s^{-1}$ | Corapcioglu & Haridas (1985)<br>Zysset (1994) |
| Степень покрытия поверхности бактериями | | 0.25–45% | Gehrke et al. (1998) |
| Концентрация насыщения прикрепляемых бактерий | $X_s$<br>$X_{S,max}$ | 6.6 x $10^{13}$ cells/kg-$FeS_2$<br>0.011g/L | Konishi (1990)<br>Zysset (1994) |
| Скорость поддержания жизнедеятельности бактерий | $k_m$ | 0.14 mol/g/day | Zysset (1994) |

**Транспорт химических компонент и бактерий в пористой среде**

Микробиологическую миграцию через пористые среды можно описать с помощью адвективно-дисперсионного уравнения с сорбцией (обратимой или необратимой), которое можно записать аналогично тому, что приведено в ссылке (Harvey, 1991),

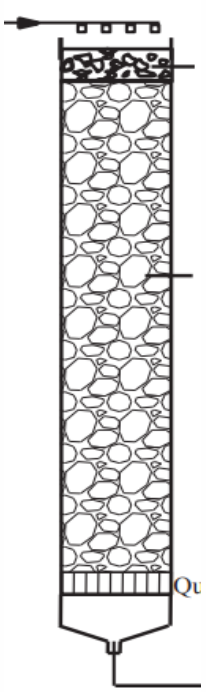
Конвективный и дисперсионный перенос химических компонент и бактерий в пористых средах, вызванный фильтрацией несжимаемой жидкости, определяется потоком со скоростью, вычисляемой из закона Дарси

$$\vec{u} = \phi\vec{v} = -k/(\rho v)\,\nabla p,$$

и закона сохранения массы несжимаемой жидкости.

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (\vec{v}\,\phi) = 0\,,$$

где $\vec{u} = \vec{v}\phi$ – средняя скорость фильтрации жидкости в пористой среде (скорость Дарси) [m·sec$^{-1}$], $\vec{v}$ – средняя скорость жидкости в порах, $\phi$ – пористость среды $(0 < \phi \leq 1)$, $k$ – коэффициент проницаемости, $\nu$ – кинематическая вязкость жидкости, $\rho$ – плотность жидкости. В случае одномерного движения несжимамой жидкости в цилиндрической трубы, заполненного пористым материалом, содержащим пирит (Рис.1), которое является целью данного исследования, скорость потока будет постоянной величиной и равна $v = |\vec{v}| - const$. Считается, что необходимые бактериям концентраций кислорода и углекислого газа в воде достаточны в той мере, что они не являются лимитирующим процесс бактериального выщелачивания, поэтому их перенос и массообмен не рассматривается. Гидродинамические характеристики пористой среды приведены в Таблице 3.




В дальнейшем для удобства записи вводится обозначения для пирита, ионов железа (II) и железа (III) в следующем виде:

$$P = [FeS_2]\,, \quad S = [Fe^{2+}]\,, \quad F = [Fe^{3+}].$$

Надо заметить, что как переносимые фильтрационным потоком ионы железа $Fe^{2+}$, $Fe^{3+}$ и бактерий в планктонной форме $X_p$, так и неподвижные относительно пористой среды пирит и прикрепленные к поверхности пирита бактерий $X_a$ являются функциями времени $t$ и продольной по трубе координаты $x$. При этом величины $P$ и $X_a$ зависят от продольной координаты как от параметра.

Таблица 3 – Гидродинамические параметры течения пористой среды

| | | | |
|---|---|---|---|
| Плотность живых бактерии<br>Плотность сушенных бактерий | $\rho$ | 1 kg/L<br>1.56 x 10$^3$g/L | Corapcioglu & Haridas (1985)<br>Clement et al, (1997) |
| Длина колонны | $l$ | 0.29m<br>0.5 m<br>0.52 m | Zysset (1994)<br>Clement et al, (1997)<br>Taylor & Jaffe (1990) |
| Скорость фильтрационного потока | $V$<br>$U$<br>$v$ | 0.1–1 м/ч<br>3 x 10$^{-2}$ cm/s<br>0.94 m/d<br>0.45 m/d | Taylor & Jaffe (1990)<br>Corapcioglu & Haridas (1985)<br>Zysset (1994)<br>Chang et al. (1991) |
| Коэффициент диффузии и дисперсии<br><br>Коэффициент дисперсии бактерий<br>Коэффициент дисперсии ионов железа<br><br>Дисперсность | $D_{eff}$<br>$D_L$<br>$D=a_l v$<br><br>$D_p$<br><br>$D_L$<br><br>$\alpha = a_l$ | $10^{-9}$–$10^{-10}$ м$^2$/с<br>4 x10$^{-6}$м$^2$/с<br>0.94 x 10$^{-3}$m$^2$/d<br><br>1.1 x 10$^{-3}$ m$^2$/d<br><br>1.1 x 10$^{-3}$ m$^2$/d<br><br>1 cm | Taylor & Jaffe (1990)<br>Corapcioglu & Haridas (1985)<br>Zysset (1994)<br><br>Chang et al. (1991)<br><br>Chang et al. (1991)<br><br>Clement et al, (1997) |
| $K$- гидравлическая проводимость,<br>$k$ - проницаемость | $K = \frac{k\rho g}{\mu}$ | 15.1 cm/min | Taylor & Jaffe (1990) |
| Пористость | $\varphi$<br>$\varphi$<br>$\varphi_0$<br>$\varphi$ | 0.6<br>0.44<br>0.347<br>0.229 | Corapcioglu & Haridas (1985)<br>Clement et al, (1997)<br>Taylor & Jaffe (1990)<br>Chang et al. (1991) |
| Проницаемость | $k$ | 2.93 x 10$^{-6}$ cm$^2$ | Taylor & Jaffe (1990) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Средний размер зерна | $d_g$ | $200\mu m$ | Clement et al, (1997) |
| Удельная поверхность пор | M | 48.5 $cm^{-1}$ | Taylor & Jaffe (1990) |

**Математическая модель биохимического выщелачивания пирита в пористой среде**

Предполагается, что 1) осаждение бактерий незначительно из-за близости плотности бактерий к плотности воды; 2) в отсутствие макроскопического градиента концентрации субстрата вклад хемотаксиса в плотность бактериального потока, как ожидается, будет незначительным.

Следует отметить, что реакции (1), (2) и (3) не являются элементарными, поэтому их скорости не обязаны подчиняться закону действующих масс (Evangelou, 1995).

Принимая во внимание изложенные выше описания кинетики биохимического выщелачивания (уравнения 4-12), роста бактерий, их адсорбции поверхностями пор и десорбции, гидродинамических параметров транспорта бактерий в пористой среде, биохимическое выщелачивания пирита описывается следующей системой из 5-ти нелинейных дифференциальных уравнений адвекции–диффузии с терминами биохимической реакций и адсорбции/десорбции относительно 5-ти неизвестных $P, S, F, X_p, X_a$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} = D_L\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\cdot\frac{\nu_P^{\max}F}{F+BS}P + 2\cdot\frac{1}{Y}\frac{\mu_{\max}S}{K_s+S}X_a\,, \quad (13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = D_L\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 3\cdot\frac{\nu_P^{\max}F}{F+BS}P - 2\cdot\frac{1}{Y}\frac{\mu_{\max}S}{K_s+S}X_a\,, \quad (14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -1\cdot\frac{\nu_{FeS2}^{\max}F}{F+B\cdot S}P\,, \quad (15)$$

$$\frac{\partial X_p}{\partial t} + u\frac{\partial X_p}{\partial x} = D_L\frac{\partial^2 X_p}{\partial x^2} + R_g^p - R_a^p + R_s^p - R_d^p\,, \quad (16)$$

$$\frac{\partial X_a}{\partial t} = R_g^a - R_d^a - R_s^a\,, \quad (17)$$

где $R_g^p$ – скорость размножения взвешенных в жидкости бактерий (бактерий в планктонной форме),

$R_a^p$ – скорость прикрепления взвешенных в жидкости бактерий к твёрдой поверхности вследствие фильтрации, хемотаксиса и/или адсорбции,

$R_s^p$ – скорость, с которой сдвиговые силы жидкости отделяют бактерий от поверхности,

$R_d^p$ – скорость отмирания бактерий в планктонной форме,

$R_g^a$ – скорость размножения прикрепленных к поверхности пор бактерий,

$R_s^a$– скорость, с которой сдвиговые силы жидкости отделяют бактерий от поверхности,

$R_d^a$ – скорость отмирания прикрепленных к поверхности пор бактерий,

$R_g^p = \mu_p X_p$, $R_a^p = k_a X_p(X_S - X_a)/X_S$, $R_s^p = k_c X_a$, $R_d^p = k_d X_p$,

$R_g^a = K_a(1 - X_a/X_S)\,\mu_a X_a$, $R_d^a = k_d X_a$, $R_s^a = R_s^p = k_c X_a$, $K_a = \alpha^{\frac{2}{3}} W_0/V$, $\alpha = W/W_0$,

$W_0$ и $W$ – начальная и текущая концентрация пирита, $V$.

В начальный момент в твердой части пористой среды имеется заданное распределение концентрации пирита $P^0(x)$. С момента времени $t=0$ до момента $t = t_0$ с верхней части трубы подается раствор, содержащий ионы железа (III) и железоокисляющие бактерий. Соответственно, начальные и граничные условия имеют следующий вид:

при $t=0$: $P = P^0(x)$, $F = F^0(x)=0$, $S = S^0(x)=0$, $X_p = X_p^0(x)=0$, $X_a = X_a^0(x)=0$, (18)

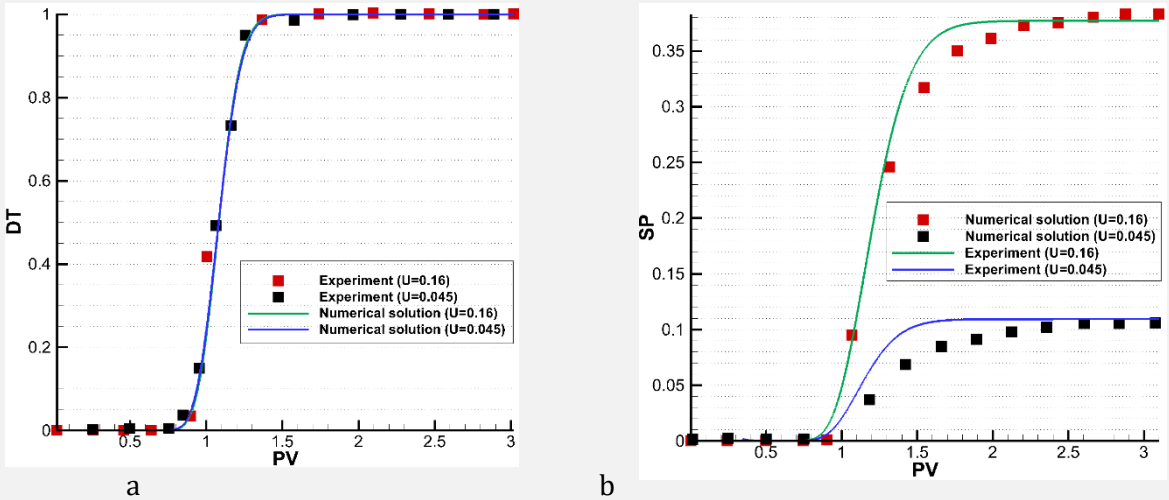
при $x=0$: $F = F^0(t) = \begin{pmatrix} F^t, & t \le t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{pmatrix}$, $S = S^0(t)=0$, $X_p = X_p^0(t) = \begin{pmatrix} X^t, & t \le t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{pmatrix}$, (19)

при $x=L$: $\partial F/\partial x = \partial S/\partial x = \partial X_p/\partial x = 0$. (20)

Уравнения (13)-(17) с начальными и граничными условиями (18), (20) являются нелинейными и решаются численными методами.

**Тестирование и валидация моделей, результаты численного решения**

Тестирование и валидация разработанной физико-биохимической, математической и численной моделей биохимического выщелачивания пирита проведено на результатах известных экспериментальных работ [Nasre-Dine Ahfir et al (2016); Hornberger G.M. (1992)].




a b

Рис.2. Изменения со временем концентраций трассера a) и взвешенных суспензии b) на выходе из трубы. Экспериментальные данные взяты из [Nasre-Dine Ahfir et al. (2016)].

На Рисунке 2 a) и b) приведены изменения со временем концентраций трассера (химический элемент) и взвешенных суспензий на выходе из трубы и сравнения их с экспериментальными данными [Nasre-Dine Ahfir et al, (2016)]. Как и ожидалось, концентрация трассера, который не прилипает к поверхности, остается неизменной. Вместе с тем происходит прикрепление больше 60% суспензий к твердым поверхностям пор. Как видно, разработанная модель вполне удовлетворительно описывает скорости прикрепления взвешенных суспензий к поверхности в зависимости от скорости потока.

a) b)

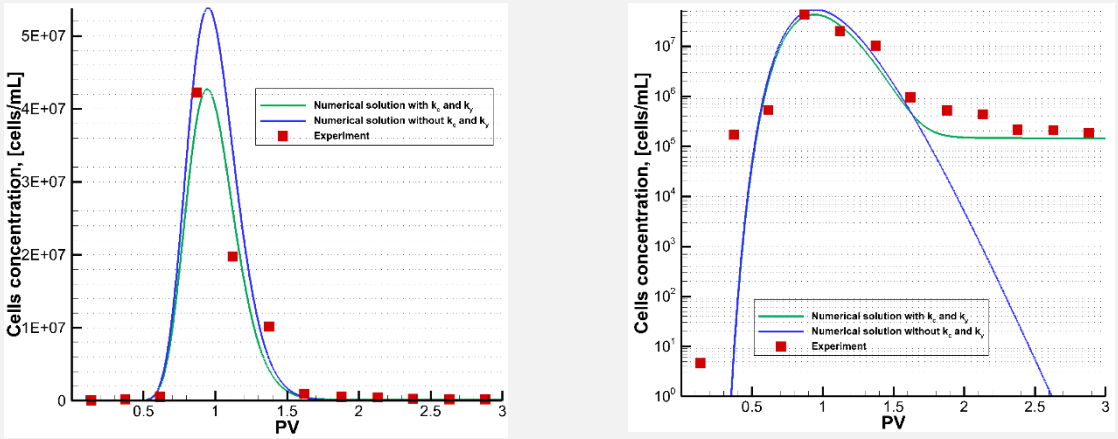



Рисунок 3. Кривые изменения со временем концентрации свободных бактерий на выходе из трубы: a) – в обычных координатах, b) – в логарифмических координатах. Экспериментальные данные взяты из работы [Hornberger G.M. (1992)].

На Рисунке 3 a) и b) приведены результаты численного решения изменения со временем концентраций бактерий на выходе из трубы и сравнения их с экспериментальными данными [Hornberger G.M. (1992)]. Так же как в предыдущем случае, результаты моделирования находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

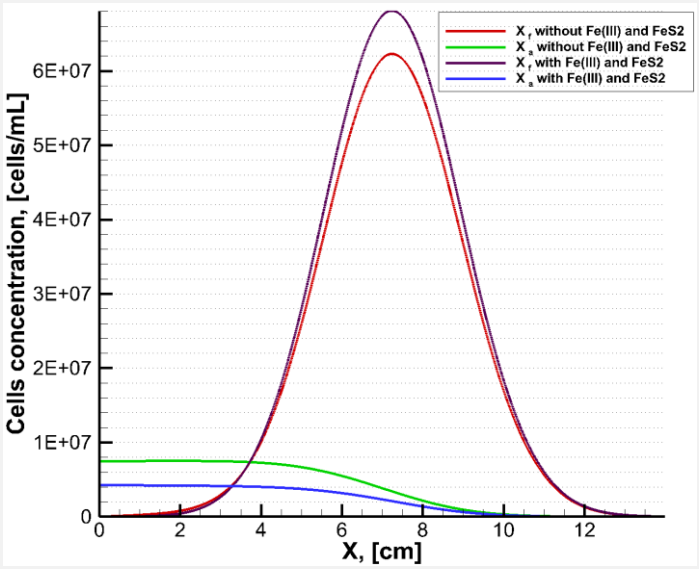



Рисунок 4. Влияние наличия пирита и ионов железа (III) ($Fe^{3+}$) на распределение планктонных бактерий вдоль колонны.

Далее проведены численные исследования биохимического выщелачивания пирита с учетом всех процессов, описанных в пункте 1.3.

Ниже на Рисунке 4 показано влияние наличия пирита и ионов железа (III) ($Fe^{3+}$) на распределение планктонных бактерий вдоль колонны.

На Рисунке 5 а) и б) приведены распределения концентраций планктонных и прикрепленных бактерий вдоль колонны.

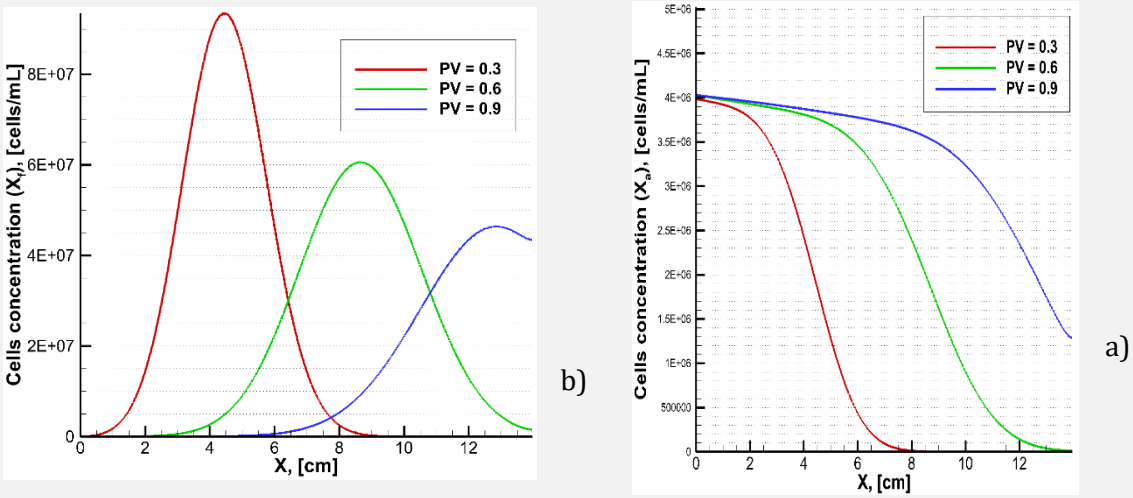
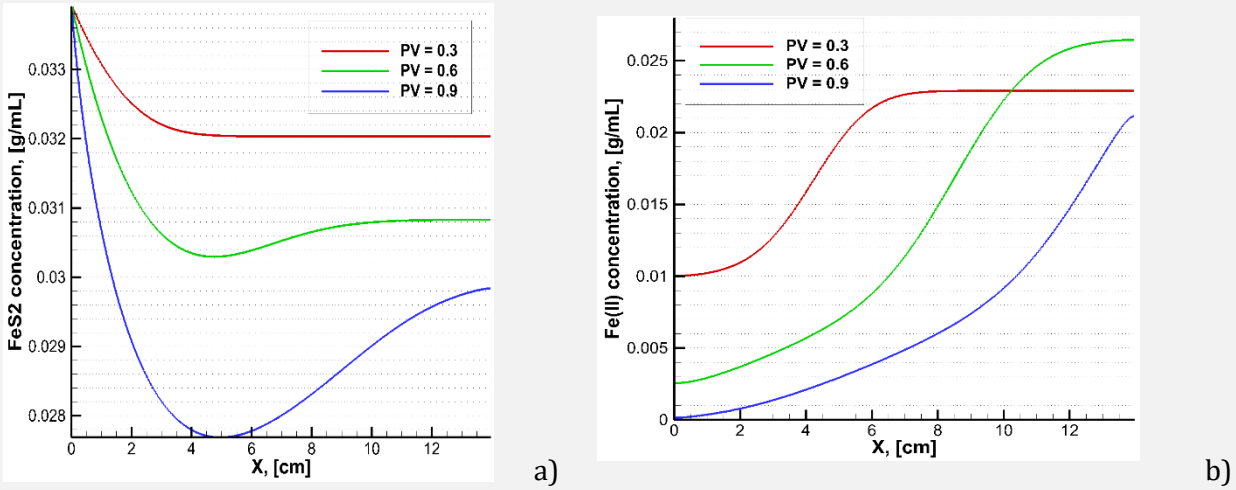



Рисунок 5. Концентрации планктонных а) и прикрепленных б) бактерий вдоль колонны в разные моменты времени.

На Рисунке 6 приведены концентрации пирита а) и железа (II) б) вдоль колонны в разные моменты времени.




a) b)

Рисунок 6. Концентрации пирита а) и железа (II) б) вдоль колонны в разные моменты времени.

**Заключение**

На основе анализа литературных данных разработана одномерная реактивно-транспортная модель бактериально-химического выщелачивания пирита в пористой среде. В единой постановке объединены кинетические зависимости, описывающие рост планктонных и прикреплённых бактерий, прикрепление клеток к поверхности пирита, их отрыв и отмирание, бактериальное окисление железа(II) и окислительное растворение пирита ионами железа(III). Модель связывает эти процессы с адвективно-дисперсионным переносом растворённых форм железа и планктонных бактерий фильтрационным потоком.

Основной результат исследования заключается в построении связанной математической модели, позволяющей совместно описывать перенос компонентов, динамику бактериальных популяций и растворение минерала. Модель включает три уравнения адвекции–дисперсии с реакционными членами для ионов железа(II), железа(III) и планктонных бактерий и два локальных кинетических уравнения для пирита и прикреплённой биомассы. Раздельное описание подвижных и неподвижных компонентов позволяет учитывать взаимосвязь переноса бактерий, их удержания на поверхности минерала и реакционных превращений.

Транспортная часть модели проверена сравнением с опубликованными экспериментальными данными по переносу трассера, взвешенных частиц и бактерий. Получено качественное согласие расчётных и экспериментальных кривых выхода в рассмотренных условиях. Возможности связанной модели проиллюстрированы численными расчётами пространственно-временных распределений бактериальных популяций, пирита и железа(II) вдоль колонны. Независимая экспериментальная проверка реакционной части остаётся задачей дальнейших исследований.

Железоокисляющие бактерии *A. ferrooxidans* и *L. ferrooxidans* получают энергию при окислении $Fe^{2+}$ до $Fe^{3+}$, обеспечивая регенерацию окислителя, участвующего в растворении пирита. Поэтому предложенная модель может служить основой для исследования образования и переноса железа(III) в пиритсодержащей пористой среде. Дальнейшее развитие этого подхода представляет интерес для моделирования выщелачивания других сульфидных минералов и окислительного растворения уранинита. Такое применение потребует включения соответствующих реакций, определения кинетических параметров и проверки модели для конкретных минеральных систем.

**Выводы**

1. Разработана одномерная реактивно-транспортная модель бактериально-химического выщелачивания пирита в пористой среде. В единой постановке объединены перенос растворённых форм железа и планктонных бактерий, рост планктонной и прикреплённой бактериальных популяций, прикрепление и отрыв клеток, их отмирание и окислительное растворение пирита.

2. Математическая постановка включает три уравнения адвекции–дисперсии с реакционными членами и два локальных кинетических уравнения для пирита и прикреплённых бактерий. Раздельное описание подвижных и неподвижных компонентов позволяет учитывать взаимосвязь переноса веществ, удержания биомассы и растворения минерала.
3. Реакционная часть модели сформулирована с использованием литературных кинетических зависимостей для роста бактерий и превращений железа при растворении пирита. Определены основные допущения, в рамках которых рассматривается взаимодействие транспортных и реакционных процессов.
4. Сравнение с опубликованными экспериментальными данными показывает качественное согласие расчётных и экспериментальных кривых выхода трассера, взвешенных частиц и бактерий. Проведённая проверка относится к транспортной части модели; реакционная часть требует независимой экспериментальной проверки.
5. Возможности предложенной модели проиллюстрированы расчётами пространственно-временных распределений бактериальных популяций, пирита и железа(II) вдоль колонны. Модель создаёт основу для дальнейшего исследования взаимосвязи переноса, динамики биомассы и окислительного растворения пирита.

**Перспективы дальнейших исследований**

Дальнейшие исследования будут направлены на уточнение параметров и области применимости предложенной модели. Приоритетной задачей является независимая экспериментальная проверка реакционной части по данным о растворении пирита, изменении концентраций железа(II) и железа(III), а также динамике планктонной и прикреплённой биомассы. При отсутствии комплексных экспериментальных данных целесообразна поэтапная проверка отдельных кинетических зависимостей в условиях, соответствующих их экспериментальному определению.

Важным направлением является анализ чувствительности модели к параметрам роста, прикрепления, отрыва и отмирания бактерий и кинетики растворения пирита. Такой анализ позволит определить параметры, наиболее существенно влияющие на расчётные результаты, оценить неопределённость прогнозов и установить приоритеты последующих экспериментальных измерений.

Развитие модели предполагает учёт переноса и потребления кислорода, изменения кислотности, превращений серосодержащих компонентов и образования вторичных осадков. При существенном изменении структуры пористой среды потребуется связать растворение пирита и накопление биомассы с изменением доступной реакционной поверхности, пористости и проницаемости.

После проверки модели и уточнения её параметров возможно исследование режимов подачи раствора и инокулята, переход к пространственно неоднородным постановкам и адаптация подхода к другим минеральным системам.

**Информация о финансировании.** Исследования проводились в рамках базового финансирования фундаментальных исследований МНВО Республики Казахстан «Разработка и развитие интеллектуальных методов решения фундаментальных задач механики, динамики и управления в машиностроении, робототехнике, сенсорных и дорожных системах», номер гранта: BR31715767.

**Литература**

1 Johnson DB. Biomining – biotechnologies for extracting and recovering metals from ores and -waste materials// Curr Opin Biotechnol – 2014. – 30, 24–31.

2 Vera, M., Schippers, A., Hedrich, S., Sand. W. Progress in bioleaching: fundamentals and mechanisms of microbial metal sulfde oxidation// Part A. Applied Microbiology and Biotechnology – 2022. – 106, 6933–6952, doi.org/10.1007/s00253-022-12168-7

3 Jones, S. and Santini, J. M. Review Article. Mechanisms of bioleaching: iron and sulfur oxidation by acidophilic microorganisms // Essays in Biochemistry – 2023.– 67, 685–699.

4 Murr L.E., Berry V.K. Direct Observations of Selective Attachment of Bacteria on Low-Grade Sulfide Ores and Other Mineral Surfaces // Hydrometallurgy, 2. – 1976. – 11-24, doi.org/10.1016/0304-386X(76)90010-4

5 Rohwerder, T., Sand, W. Chapter 2. Mechanisms and Biochemical Fundamentals of Bacterial Metal Sulfide Oxidation// Microbial Processing of Metal Sulfides, Springer, (edited by E. Donati and W. Sand) – 2007. – 35-58.

6 Gehrke, T., Telegdi, J., Thierry, D., & Sand, W. Mechanisms of bacterial attachment to mineral surfaces // Applied and Environmental Microbiology – 1998. – 64(1), 274–279.

7 Rohwerder, T., Gehrke, T., Kinzler, K., & Sand, W. Bioleaching review part A: progress in bioleaching: fundamentals and mechanisms of bacterial metal sulfide oxidation // Applied and Environmental Microbiology – 2003. – 63, 239–248.

8 Vera M., Schippers A., Sand W. Progress in bioleaching: fundamentals and mechanisms of bacterial metal sufide oxidation // Part A. Appl Microbiol Biotechnol – 2013. – 97, 7529-7541, doi.org/10.1007/s00253-013-4954-2.

9 Eligwe, C. Microbial desulphurization of coal // FUEL – 1988. – 67, 451-458.

10 Ehrlich H. Past, present and future of biohydrometallurgy // Hydrometallurgy. – 2001. – 59. 127–134, doi.org/10.1016/S1572-4409(99)80002-9.

11 Каравайко Г.И., Росси Дж., Агате А., Грудев С., Авакян З.А., Биогеотехнология металлов// М.: Центр международных проектов ГКНТ – 1989. –375с.

12 Watling, H. R. Review of biohydrometallurgical metals extraction from polymetallic mineral resources //*Minerals* –2015. –5, 1–60.

13 Jones, C. and Kelly, D. Growth of *Thiobacillus ferrooxidans* on Ferrous Iron in Chemostat Culture: Influence of Product and Substrate Inhibition // *J. Chem. Tech. Biotechnol* – 1983. – 33B, 241-261.

14 Singer, P. C., & Stumm, W. Acidic mine drainage: the rate-determining step // Science – 1970. – 165, 325–327.

15 Lizama H. M., Suzuki I. Bacterial leaching of a sulfide ore by Thiobacillus ferrooxidans and Thiobacillus thiooxidans part II: Column leaching studies // Hydrometallurgy – 1989. – 22, N3, 301–310. https://doi.org/10.1016/0304-386x(89)90027-3

16 Evangelou & Zhang. A review: pyrite oxidation mechanisms and acid mine drainage prevention // Critical Reviews in Environmental Science and Technology –1995. – 25, 141–199.

17 Boon M., Brasser H.J., Hansford G.S., Heijnen J.J. Comparison of the oxidation kinetics of different pyrites in the presence of Thiobacillus ferrooxidans or Leptospirillum ferrooxidans // Hydrometallurgy – 1999 –53, 57–72. doi.org/10.1016/S0304-386X(99)00037-7

18 Ehrlich, H.L. Review. Beginnings of rational bioleaching and highlights in the development of biohydrometallurgy: A brief history // The European Journal of Mineral Processing and Environmental Protection – 2004 – 4, No.2, 1303-0868, pp. 102-112

19 Ojumu, T., Petersen, J., Searby, G., Hansford, G. A review of rate equations proposed for microbial ferrous-iron oxidation with a view to application to heap bioleaching // Hydrometallurgy – 2006. – 83, 21–28. doi.org/10.1016/j.hydromet.2006.03.033

20 Rawlings D. Relevance of Cell Physiology and Genetic Adaptability of Biomining Microorganisms to Industrial Processes // Biomining – 2007. – 177-198.

21 Petersen J. Modelling of bioleach processes: Connection between science and engineering // Hydrometallurgy –2010 –104, 404–409, doi.org/10.1016/j.hydromet.2010.02.023

22 Liu, M., Branion, R., Duncan, D. The Effects of Ferrous Iron, Dissolved Oxygen, and Inert Solids Concentrations on the Growth of *Thiobacillus Ferrooxidans* // The Canadian Journal of Chemical Engineering – 1988 – *66,* 445-451.

23 Karamanev, D. Model of the biofilm structure of *Thiobacillus ferrooxidans* // Journal of Biotech – 1991. – 20, 5 1-64.

24 Rittmann, B. and VanBriesen, J. Microbiological processes in reactive modeling // Reactive Transport in Porous Media. – 1996. – 311-334. hdoi.org/10.1515/9781501509797-01

25 Boon M., Heijnen J.J. Chemical oxidation kinetics of pyrite in bioleaching processes // Hydrometallurgy –1998. – 48, 27–41. doi.org/10.1016/S0304-386X(97)00072-8J.

26 Petersen J., Dixon D. Modeling and Optimization of Heap Bioleach Processes // Biomining. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag – 2007. – 153-176. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34911-2_8

27 Chang Y.C., Myerson A.S. Growth models of the continuous bacterial leaching of iron pyrite byThiobacillus ferrooxidans // Biotechnology and Bioengineering – 1982. – 24, NO4, 889–902. https://doi.org/10.1002/bit.260240411

28 B. Pesic and D. J. Oliver. An Electrochemical Method of Measuring the Oxidation Rate of Ferrous to Ferric Iron with Oxygen in the Presence of Thiobacillus ferrooxidans // Biotechnology and Bioengineering – 1989 – 33, 428-439.

29 Konishi Y., Asai S., Katoh H. Bacterial dissolution of pyrite by Thiobacillus ferrooxidans // Bioprocess Engineering. – 1990.– 5, 231–237. https://doi.org/10.1016/0009-2509(92)80207-SPirt (1982

30 Rashidi T.H., Auld J, Mohammadian A.K. A behavioral housing search model: Two-stage hazard-based and multinomial logit approach to choice-set formation and location selection // Transportation Research Part A: Policy and Practice. – 2012. – 46, 1097–1107

31 Boon M., Heijnen J.J. Chemical oxidation kinetics of pyrite in bioleaching processes // Hydrometallurgy – 1998. – 48, 27–41. https://doi.org/10.1016/S0304-386X(97)00072-8

32 Corapcioglu M., Haridas A. Microbial transport in soils and groundwater: A numerical model // Advances in Water Resources. – 1985. – 8, 188-200. https://doi.org/10.1016/0309-1708(85)90063-6

33 Chang, M.M., Chung, F.T-H., Bryant, R.S.,Gao, H.W. and Burchfield, T.E., Modeling and Laboratory Investigation of Microbial Transport Phenomena in Porous Media//*SPE* – 1991 – 22845, 299-308.

34 Zysset, A. et al. Modeling of reactive ground water transport Governed by biodegradation // Water Resources Research – 1994. – 30, NO. 8, 2423-2434.

35 Molchanov Sh., Gendel Yu., Ioslvich I., Lahav O. Improved Experimental and Computational Methodology for Determining the Kinetic Equation and the Extant Kinetic Constants of Fe(II) Oxidation by Acidithiobacillus ferrooxidans // Applied and Environmental Microbiology. – 2007. –73, NO 6, 1742–1752. https://doi.org/10.1128/AEM.01521-06

36 Dziurla, M. A., Achouak, W., Lam, B.-T., Heulin, T., and Berthelin, J.,] Enzyme-linked immunofiltration assay to estimate attachment of thiobacilli to pyrite // Applied and Environmental Microbiology – 1998. – 64, 2937–2942.

37 Bagdigian, R. Myerson, A. The Adsorption of Thiobadus ferrooxidans on Coal Surfaces // Biotechnology and Bioengineering – 1986. – 28, 467-479.

38 Myerson, A. and Kline, P. Continuous Bacterial Coal Desulfurization Employing Thiobacillus Ferrooxidans // Biotechnology and Bioengineering – 1984. – 26, 092-099.

39 Herzig, P., Leclerc, D., Le Goff, P. Flow of Suspensions through Porous Media - Application to deep filtration. Industrial and Engineering Chemistry// In: Flow Through Porous Media, Am. Chem. Soc., Washington, D.C. – 1970. – pp. 129-157.

40 Taylor, S.and Jaffe, P. Substrate and Biomass Transport in a Porous Medium// Water Resources Research –1990. – 26, NO. 9, 2181-2194.

41 Corapcioglu, M., Haridas, A. Transport and Fate of Microorganisms in Porous Media: A Theoretical Investigation// Journal of Hydrology, –1984. – 72, 149–169.

42 Kargi F., Weissman J.G. Kinetic parameter estimation in microbial desulfurization of coal // Biotechnology and Bioengineering. – 1987. –30. NO9, 1063–1066. doi.org/10.1002/bit.260300909

43 Clement, T., Skeen, R., Jennings, D., Petersen, J. Microbial growth and transport in porous media under denitrification conditions: experiment, ts and simulations // Journal of Contaminant Hydrology – 1997. – 24, 269-285.

44 Ahfir N.-D., Hammadi A., Alem A., Wang H., Le Bras G., Ouahbi T. Porous media grain size distribution and hydrodynamic forces effects on transport and deposition of suspended particles // Journal of Environmental Sciences. – T. 53. – 2017. – C. 161–172. http://dx.doi.org/10.1016/j.jes.2016.01.032

45 Hornberger G.M., Mills A.L., Herman J. Bacterial transport in porous media: Evaluation
46 of a model using laboratory observations // Water Resour. Res. – 1992. – T. 28. – C. 915-938. https://doi.org/10.1029/91WR02980

**УДК: 49.33.31**
**DOI: https://doi.org/10.66941/3106-9037/2026/iss3pp51-67**

**М. Кунелбаев, А. Рахыш***
*Казахский национальный университет им. аль Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: rakhysh_aigerim3@live.kaznu.kz

## РАСЧЁТНАЯ ОЦЕНКА КОММУНИКАЦИОННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ СОБЫТИЙНОЙ СИСТЕМЫ ВИДЕОМОНИТОРИНГА НА БАЗЕ ESP32-CAM И FPGA

**Мурат Кунелбаев,** профессор, старший научный сотрудник Института информационных и вычислительных технологий (ИИВТ) и преподаватель кафедры искусственного интеллекта и Big Data КазНУ им. аль-Фараби;

**Айгерім Рахыш,** PhD докторант по специальности «Системы информационной безопасности» кафедры «Кибербезопасность и Криптология».

**Аннотация.** В данном исследовании с помощью математического моделирования и анализа ранее полученных экспериментальных данных изучены ограничения канала связи в системе событийного видеоконтроля, построенной на элементах ESP32-CAM и FPGA. Предложена вычислительная модель передачи данных по шине UART, которая дает возможность определить степень загруженности линии, наименьшую длительность отправки сообщений, запас пропускной способности, а также оценить воздействие служебных байтов на процесс обмена. Проанализированы три варианта отправки данных: целого сжатого кадра, фрагмента (ROI) и итоговых данных детекции. На скорости 921 600 бод доля загрузки канала составила 32,55 %, 7,81 % и 2,78 % соответственно. Выявлено, что замена полного кадра на ROI приводит к падению полезной нагрузки на 76 %. Рассчитан порог выделения области интереса — 11,07 мс; превышение этого значения делает целесообразным переход на передачу ROI для экономии времени. Анализ опубликованных данных выявил уменьшение медианной задержки системы ESP32-CAM с FPGA на 22,58 % по сравнению с конфигурацией без FPGA. Предложены расчетные критерии для выбора формата сообщения и оценки последовательной передачи пакетов. Полученные результаты позволяют определить условия рационального использования пропускной способности UART.
**Ключевые слова:** событийный видеомониторинг; ESP32-CAM; FPGA; UART; задержка; нагрузка канала.

**М. Кунелбаев, А. Рахыш***
*әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,Алматы, Қазақстан*
E-mail: rakhysh_aigerim3@live.kaznu.kz

## ESP32-CAM ЖӘНЕ FPGA НЕГІЗІНДЕГІ ОҚИҒАЛЫҚ БЕЙНЕ МОНИТОРИНГ ЖҮЙЕСІНІҢ КОММУНИКАЦИЯЛЫҚ ШЕКТЕУЛЕРІН ЕСЕПТІК БАҒАЛАУ

**Мұрат Кунелбаев,** профессор, Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институтының (АЕТИ) аға ғылыми қызметкері және әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың Жасанды интеллект және Big Data кафедрасының оқытушысы;
**Айгерім Рахыш**, Киберқауіпсіздік және криптология кафедрасының «Ақпараттық қауіпсіздік жүйелері» мамандығы бойынша PhD докторант.

**Аннотация.** Бұл зерттеуде математикалық модельдеу және бұрын алынған эксперименттік деректерді талдау арқылы ESP32-CAM және FPGA негізінде құрылған оқиғаларға негізделген бейнемониторинг жүйесіндегі байланыс арнасының шектеулері зерттелді. UART шинасы арқылы деректерді берудің есептеу моделі ұсынылды. Модель байланыс желісінің жүктелу деңгейін, хабарламаларды берудің ең аз ұзақтығын және өткізу қабілетінің қорын анықтауға,

сондай-ақ қызметтік байттардың дерек алмасуға әсерін бағалауға мүмкіндік береді. Деректерді берудің үш нұсқасы талданды: толық сығылған кадрды, қызығушылық аймағын (ROI) және детекцияның қорытынды деректерін беру. 921 600 бод жылдамдықта арнаның жүктелу деңгейі тиісінше 32,55 %, 7,81 % және 2,78 % болды. Толық кадрдың орнына ROI беру пайдалы жүктеме көлемін 76 %-ға азайтатыны анықталды. Қызығушылық аймағын бөліп алудың шекті уақыты 11,07 мс деп есептелді; осы мәннен асқан жағдайда уақытты үнемдеу үшін ROI беруге көшу орынды болады. Жарияланған деректерді талдау FPGA қолданылатын ESP32-CAM жүйесінің медианалық кідірісі FPGA қолданылмайтын конфигурациямен салыстырғанда 22,58 %-ға төмендегенін көрсетті. Хабарлама пішімін таңдауға және пакеттерді тізбектей беруді бағалауға арналған есептік критерийлер ұсынылды. Алынған нәтижелер UART өткізу қабілетін ұтымды пайдалану шарттарын анықтауға мүмкіндік береді.
**Түйін сөздер:** оқиғалық бейнемониторинг; ESP32-CAM; FPGA; UART; кідіріс; арна жүктемесі.

**Kunelbayev M., Rakhysh A.***
*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: rakhysh_aigerim3@live.kaznu.kz

**CALCULATION-BASED ASSESSMENT OF COMMUNICATION CONSTRAINTS IN AN EVENT-DRIVEN VIDEO MONITORING SYSTEM BASED ON ESP32-CAM AND FPGA**

**Murat Kunelbayev,** Professor, Senior Researcher at the Institute of Information and Computational Technologies (IICT), and Lecturer at the Department of Artificial Intelligence and Big Data, Al-Farabi Kazakh National University;
**Aigerim Rakhysh**, PhD student in Information Security Systems at the Department of Cybersecurity and Cryptology.
**Abstract.** This study investigates communication channel constraints in an event-driven video monitoring system based on ESP32-CAM and FPGA through mathematical modeling and the analysis of previously obtained experimental data. A computational model of data transmission over the UART interface is proposed to determine channel utilization, the minimum message transmission time, and bandwidth headroom, as well as to assess the impact of overhead bytes on data exchange. Three data transmission options are analyzed: a complete compressed frame, a region of interest (ROI), and detection results. At a baud rate of 921,600, channel utilization was 32.55%, 7.81%, and 2.78%, respectively. Replacing a complete frame with an ROI was found to reduce the payload by 76%. A threshold of 11.07 ms was calculated for region-of-interest extraction; exceeding this value makes switching to ROI transmission advantageous for saving time. An analysis of published data revealed a 22.58% reduction in the median latency of the ESP32-CAM system incorporating an FPGA compared with the configuration without an FPGA. Calculation-based criteria are proposed for selecting the message format and evaluating sequential packet transmission. The results identify the conditions for efficient utilization of UART bandwidth.
**Keywords:** event-driven video monitoring; ESP32-CAM; FPGA; UART; latency; channel utilization.

## Введение

Передача каждого видеопотока на аппаратный ускоритель в системах распределенного наблюдения приводит к повышенной нагрузке на канал связи между камерой и вычислительным блоком. Хотя запуск анализа лишь при фиксации движения снижает объем обрабатываемых кадров, продолжительность отдельного цикла остается ограниченной временем, необходимым для передачи данных, их обработки и публикации итогов. Следовательно, решение о том, что именно отправлять — сжатое изображение, выделенную область или краткий результат, — должно базироваться на объективных характеристиках пропускной способности канала. В источнике [1] описывается система видеонаблюдения, реагирующая на события, которая включает в себя ПИР-сенсор, микроконтроллер ESP32-CAM и программируемую логическую интегральную схему (ПЛИС). Данная конструкция выступает базовой моделью для текущего исследования. Чтобы проанализировать функциональные

возможности камеры и контроллера, целесообразно опираться на данные тестирования модуля ESP32-CAM, опубликованные в работе [2]. Авторы работ [3] и [4] проанализировали системы мониторинга и детекции перемещений, построенные на микроконтроллере ESP32, тогда как в источнике [5] исследовался вопрос передачи видеопотока через сеть Wi-Fi. Стратегия обработки: локальная или отправка кадров на сервер — напрямую определяет трафик сети и задержку при получении итогового результата. В исследовании [6] проанализированы подходы к распределению задач при периферийном выявлении объектов на платформе ESP32. Характеристики ESP32-CAM как программируемого модуля для исследовательских задач изложены в источнике [7]. Использование энергоэффективных камерных систем в дистанционных сетях видеонаблюдения обсуждается в работе [8], тогда как аспекты выбора протоколов беспроводной передачи изображений освещены в публикации [9]. Проблематика адаптивного мониторинга в условиях нехватки вычислительных мощностей рассматривалась в работе [10]. Для повышения скорости анализа видеопотока активно используются программируемые логические матрицы (FPGA). В частности, Саркар и соавторы [11] разработали систему интерфейса между камерой и FPGA, тогда как исследование [12] описывает FPGA-ускоритель для задач обнаружения объектов в промышленной сфере. Тематике аппаратных ускорителей детектирования объектов посвящен обзор [13]. В работе [14] анализируются специфические требования, предъявляемые к функционированию систем в режиме реального времени. Обобщающий обзор методов оптимизации FPGA-интерпретаций семейства алгоритмов YOLO представлен в источнике [15]. Что касается практической реализации, то примеры использования FPGA-технологий в задачах многокамерного видеонаблюдения и в составе автономных комплексов детально описаны в публикациях [16]–[18]. Особое внимание уделяется анализу информации, поступающей от событийных камер. В работе [19] рассматривается задача выявления перемещающихся объектов с применением таких сенсоров и программируемых логических интегральных схем (ПЛИС). Обзор существующих решений для событийного зрения на базе ПЛИС содержится в источнике [20], а фундаментальные основы данной технологии систематизированы в статье [21]. В источнике [22] изложена аппаратно-программная структура для мониторинга множества объектов. Работа [23] посвящена созданию камеры, измеряющей оптический поток на основе событий, тогда как в [24] предложена система выявления и сопровождения объектов, ориентированная на периферийные устройства.

Задачей работы выступает повторный анализ материалов [1]: производится вычисление утилизации UART-интерфейса при передаче сообщений различных категорий, определяется воздействие служебных байтов на эффективность канала, а также сопоставляются медианные значения задержек для конфигураций ESP32-CAM и комбинированной системы ESP32-CAM с FPGA. Детальное исследование временных затрат на каждом этапе обработки исключено из-за отсутствия опубликованных временных меток для этих операций.

**Методология.** Когда срабатывает инфракрасный датчик движения, модуль ESP32-CAM фиксирует снимок с помощью камеры OV2640. Полученные данные передаются на FPGA через интерфейс UART, после чего сигнал о фиксации объекта отправляется обратно на ESP32 и транслируется в сеть по протоколу Wi-Fi. Структура системы и внешний вид прототипа, описанные в источнике [1], представлены на рисунках 1 и 2. Функции обеспечения безопасности данных, выделенные в исходной схеме, трактуются здесь как часть архитектурного решения; при этом в работе [1] отсутствуют сведения об оценке их стоимости и проверке корректности реализации.

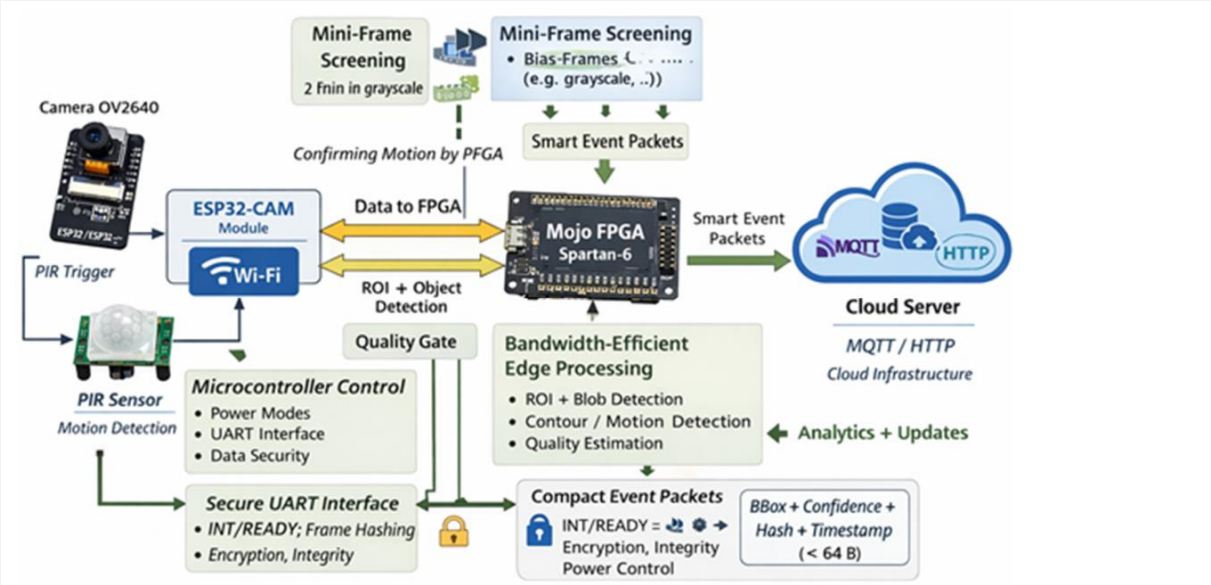



Рисунок 1 – Архитектура событийного видеомониторинга [1]

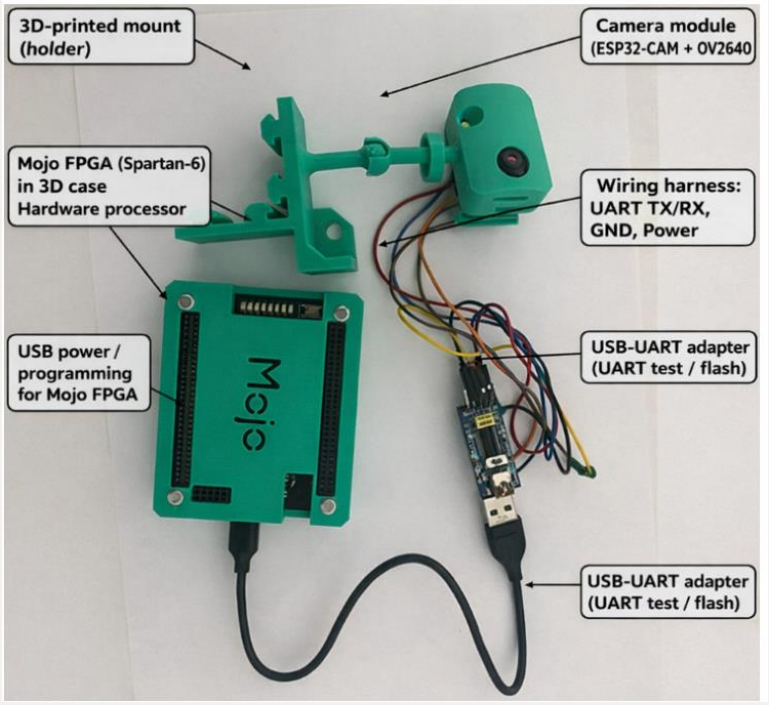



Рисунок 2 – Экспериментальный образец [1].

В таблице 1 агрегированы первоначальные параметры [1]. Частоты 25 и 40 пакетов в секунду отражают различные режимы работы и не предполагают одновременную передачу всех трех потоков в рамках одного теста. Показатели времени реакции фиксируют интервал между активацией PIR-датчика и подтверждением публикации, при этом они не изолируют время, затраченное исключительно на вычисления в FPGA.

Таблица 1. Опубликованные данные, использованные в расчётах [1]

| Поток | Средний размер, Б | P95 размера, Б | Частота, пак./с |
|---|---|---|---|
| Сжатый кадр | 1200 | 1600 | 25 |
| Область интереса / признаки | 180 | 240 | 40 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Результат обнаружения | 64 | 96 | 40 |

**Математическая модель обмена ESP32 CAM и FPGA по UART.** Предложенная модель применяется для вторичной обработки сводных данных, размещенных в источнике [1]. Ее задача –определить минимальную продолжительность сеанса связи, оценить занятость последовательного порта и обосновать выбор структуры пакета. Важно отметить, что рассчитанные показатели не отражают фактическое время выполнения этапов работы прототипа.

В рамках каждого конкретного сценария $i$ берутся следующие параметры: средняя длина сообщения $S_i$ (в байтах), 95-й перцентиль длины $S_{95,i}$ (в байтах), частота отправки $f_i$ (сообщений в секунду) и пропускная способность канала $B = 921,600$ бод. При использовании протокола UART с конфигурацией 8N1 на передачу одного байта уходит 10 бит. Анализ каналов связи ESP32→FPGA и FPGA→ESP32 проводится независимо друг от друга, поэтому частоты передачи для различных сценариев не суммируются.

$$R_i + S_i, C = \frac{B}{10} = 92160\, {}^{B}/_{C}\,, U_i = {}^{R_i}/_{C} = 10\, S_i f_i / B \qquad (1)$$

$R_i$ – полезный поток (Б/с); C – идеальная верхняя граница пропускной способности для 8N1; $U_i$ – безразмерная расчётная загрузка. В процентах $U_i$ умножается на 100. Уравнение (1) не учитывает паузы, служебные байты и повторные передачи.

$$\Delta R_i = 1 - {}^{R_i}\!/_{R_{\text{кадр}}} \qquad (2)$$

В уравнении (2) снижение потока оценивается относительно сценария передачи сжатого кадра при указанных для каждого сценария частотах; оно не доказывает одинаковую полезность передаваемых данных.

$$t_{i,min} = 10\, S_i f_i / B,\ t_{95,\text{разм},i} = 10\, S_{95,i} / B \qquad (3)$$

Первая величина рассчитана для среднего размера, вторая – для $P_{95}$ размера. $t_{95}$, размер не является квантилем $P_{95}$ фактически измеренной задержки: ожидание интерфейса, очереди и обработка FPGA в уравнение (3) не входят.

$$R_i(h_i) = (S_i + h_i) f_i, U_i(h_i) = \frac{10(S_i + h_i) f_i}{B} \qquad (4)$$

$$t_{i,min}(h_i) = \frac{10(S_i + h_i) f_i}{B}, \frac{\partial U_i}{\partial h_i} = 10 f_i / B \qquad (5)$$

$h_i$ – добавленные байты на одно сообщение. Значения $h_i$ = 0, 32 и 64 Б используются только как сценарии чувствительности; размер служебных полей прототипа в [1] не опубликован. Уравнения (4)–(5) не моделируют повторы и интервалы простоя.

$$f_{i,max}(\alpha, h_i) = \frac{\alpha B}{[10(S_i + h_i) f_i]}, 0 < \alpha < 1 \qquad (6)$$

α – заданная проектная доля допустимой загрузки. Это свободный параметр сценария, а не измеренная характеристика установки. Если $f_i$ превышает $f_{i,max}$, выбранный резерв интерфейса не обеспечивается даже в идеализированной модели.

Кадр и область интереса передаются в направлении ESP32→FPGA. Пусть $t_{ROI}$ – дополнительное время выделения области интереса на ESP32. Для одного и того же события переход на ROI сокращает сумму времени выделения и минимального времени передачи только при следующем условии:

$$t_{ROI} + 10(S_{ROI} + h_{ROI})/10(S_{cadr} + h_{cadr})/B \qquad (7)$$

$$t_{ROI} < t_{ROI,max} = 10[S_{cadr} + h_{cadr}) - (S_{ROI} + h_{ROI})/B \qquad (8)$$

При $S_{cadr}$ = 1200 Б, $S_{ROI}$ = 180 Б и $h_{cadr} = h_{ROI} = 0$ расчётный порог $t_{ROI,max}$ = 11,07 мс. Время фактического выделения ROI не опубликовано, поэтому уравнение (8) задаёт проверяемое условие, а не установленное преимущество. Оно сопоставляет только указанные стадии и не охватывает полную задержку события.

$$\Delta T_p = T_{p,}ESP32 - T_{p,}ESP32 + FPGA$$

$$\delta_p = \frac{\Delta T_p}{T_p}\text{v} \qquad (9)$$

$$p = 50{,}95{,}99$$

$T_p$ обозначает опубликованный квантиль времени от срабатывания PIR-датчика до подтверждения публикации. Вычитание квантилей даёт разницу опубликованных характеристик режимов, а не квантиль попарных разностей для одних и тех же событий.

Таблица 2. Расчёт по опубликованным данным

| Сценарий | S, Б | f, 1/с | U, % | t_min, мс |
|---|---|---|---|---|
| Сжатый кадр | 1200 | 25 | 32,55 | 13,02 |
| Область интереса | 180 | 40 | 7,81 | 1,95 |
| Результат обнаружения | 64 | 40 | 2,78 | 0,69 |

Согласно данным таблицы 2, полные задержки для конфигураций ESP32 и ESP32 с FPGA составляют: P50 – 620 и 480 мс, P95 – 980 и 780 мс, P99 – 1300 и 1050 мс [1]. Из формулы (9) следует, что абсолютная разница равна 140, 200 и 250 мс, а относительное снижение – 22,58 %, 20,41 % и 19,23 %. Исследование базировалось на 80 событиях для каждого режима, однако детали исходных выборок и временные метки отдельных этапов не публиковались. В связи с этим невозможно рассчитать доверительные интервалы или установить точный вклад UART и FPGA в формирование указанных показателей.

**Методика вторичного анализа.** Полезная нагрузка потока, характеризующегося средней длиной сообщения S и частотой f, вычисляется по формуле R = S·f (в байтах в секунду). При использовании асинхронного формата передачи данных 8N1 один байт кодируется десяти битами (включая стартовый, восемь информационных и стоповый биты). Следовательно, теоретический предел пропускной способности для скорости 921 600 бод равен C = B/10 = 92 160 Б/с. Коэффициент загрузки канала определяется как U = R/C. Данный расчет базируется на предположении о непрерывном потоке без перерывов и игнорирует служебные данные, такие как заголовки, подтверждения, контрольные суммы и механизмы повторной передачи.

Минимальное время отправки пакета выражается формулой $t_s = 10S/B$. Для 95-го процентиля размера пакета аналогичным образом выводится значение $t_{95,разм} = 10S_{95}/B$. Важно отметить, что эта величина не отражает реальный 95-й процентиль задержки, так как квантиль размера пакета не учитывает время в очереди, задержки на инициализацию FPGA и задержки, вызванные повторными отправлениями. Относительное снижение полезной нагрузки по сравнению со сжатым кадром рассчитывается через $\Delta R = 1 - R_i/R_{кадр}$.

Каждому типу сообщения в расчетах отводится собственный сценарий. Направление ESP32→FPGA охватывает сжатый кадр и область интереса, тогда как короткое сообщение с результатом направлено от FPGA к ESP32. Следовательно, полученные показатели нагрузки сопоставляются по сценариям, а не суммируются как три параллельно измеряемых потока. Для UART, использующего общий физический канал, требуется отдельно выяснить, позволяет ли конкретная реализация одновременный обмен; в доступных источниках режим полнодуплексной работы не детализирован.

Чтобы оценить влияние служебных данных, вводится переменная h, обозначающая количество дополнительных байтов на сообщение. Расчетная нагрузка определяется как R(h) = (S + h)·f, загрузка канала – U(h) = 10(S + h)f/B, а минимальное время передачи – t(h) = 10(S + h)/B. При нулевом значении h получаются показатели, представленные в таблице 2. Поскольку в

источнике [1] не указаны размеры заголовков, подтверждений и повторных передач, численные значения для h > 0 в данной работе не рассчитываются.

Алгоритм обработки исходных данных следующий: для каждого типа сообщения фиксируются опубликованные значения среднего размера (S), 95-го процентиля ((P95)) и частоты (f). На основе общей скорости (B) вычисляются (R), (C), (U), (t_s) и (t_{95}); затем при единой базе сравнения определяется относительное снижение потока. Округление производится после всех вычислений: загрузка и относительные изменения приводятся с точностью до 0,01 процентного пункта, а время — до 0,01 мс. Исходные данные в таблице 1 остаются без изменений.

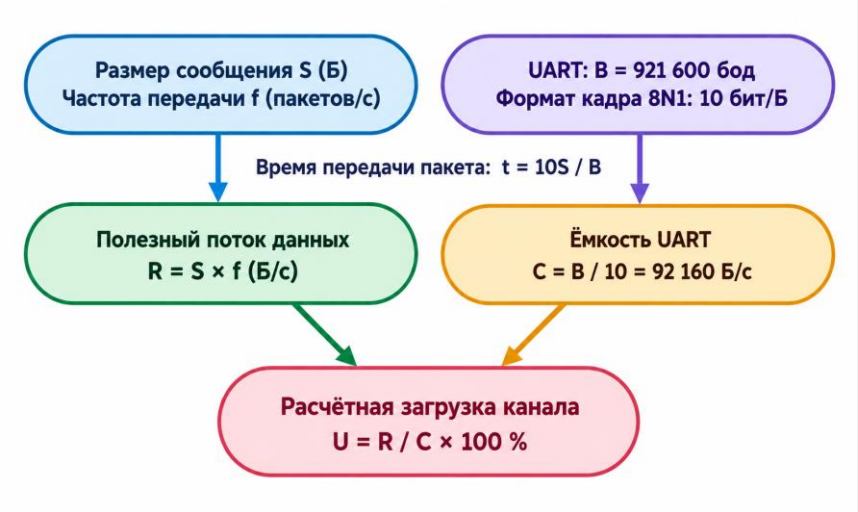



Рисунок 3. Методика расчёта загрузки UART

На рисунке 3 представлена методика вычисления загрузки линии UART. Поток данных RR вычисляется на основе среднего размера сообщения SS и частоты передачи ff, тогда как пропускная способность канала CC определяется скоростью UART и форматом 8N1. Оценка загрузки осуществляется через отношение R/C, а минимальное время отправки одного пакета рассчитывается по формуле 10S/B. Полученные показатели являются теоретическими и не принимают во внимание служебную информацию, интервалы пауз и случаи повторной отправки.

Для сопоставления опубликованных задержек применяется разность квантилей $\Delta T_p$ = T, ESP32 – T, FPGA и относительное изменение $\delta_p = \Delta T_p/T_p$,ESP32. В источнике [1] приведено по 80 событий для каждого режима, однако отсутствуют парные временные метки этапов или исходные данные. В связи с этим оценка доверительных интервалов и статистической значимости различий в данном случае не проводится.




Рисунок 4. Этапы обработки события и предлагаемые точки регистрации времени

Представленная на рисунке 4 блок-схема определяет последовательность фиксации временных меток, необходимую для пошаговой оценки задержек. Показанные интервалы $t_0$–$t_6$ служат ориентиром для измерений; при этом в исходной публикации [1] доступны лишь квантили общей задержки, а детальные журналы отсутствуют. Вычисление разностей между смежными отметками позволит проанализировать вклад каждого этапа: захвата, передачи данных на FPGA, их обработки, возврата результата и сетевой публикации.




Рисунок 5. Блок-схема методики вторичного анализа опубликованных данных

На рисунке 5 представлена блок-схема метода вторичного анализа опубликованных данных. Схема разделяет расчетные показатели передачи по UART, сценарный анализ служебных байтов и сравнение опубликованных квантилей задержки. Времена отдельных этапов обработки в источнике [1] не измерялись.

**Резерв пропускной способности.** При установлении проектного значения α на уровне 0,70 пропускная способность для передачи полезной информации в конфигурации 8N1 достигает 64 512 бит/с. В таблице 4 приведены данные о допустимой частоте, обеспечивающей

указанный резерв. Полученные расчетные границы характеризуют каждый отдельный сценарий и не должны восприниматься как фактические измеренные показатели скорости передачи данных устройства.

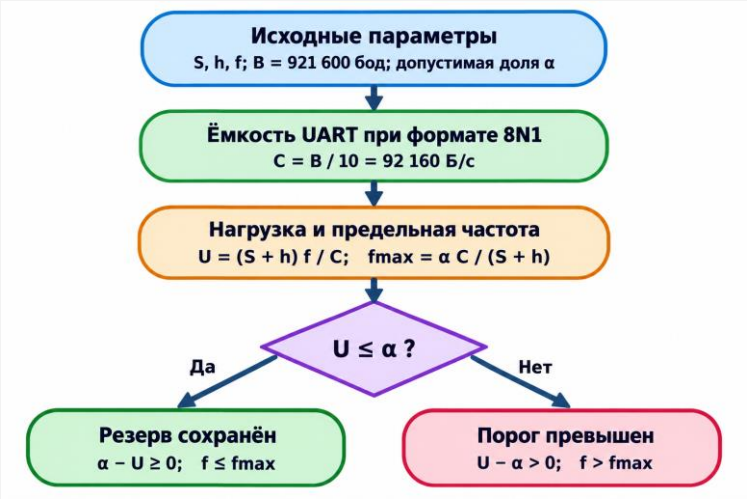



Рисунок 6. Блок-схема оценки резерва пропускной способности UART

На рисунке 6 изображена блок-схема, предназначенная для оценки запаса пропускной способности интерфейса UART. Расчет для каждого вида сообщения производится независимо. Параметр α определяет допустимую долю от теоретической емкости канала; так, значение α = 0,70 отражает проектную нагрузку на уровне 70 %. Символ h указывает на объем дополнительных байт, добавляемых к сообщению, однако данное значение не было измерено в первоисточнике.

Таблица 3. Расчётный предел частоты сообщений при α = 0,70 и B = 921 600 бод

| Сценарий | S, Б | fmax при h = 0, 1/с | fmax при h = 64 Б, 1/с |
|---|---|---|---|
| Сжатый кадр | 1200 | 53,76 | 51,04 |
| Область интереса | 180 | 358,40 | 264,39 |
| Результат обнаружения | 64 | 1008,00 | 504,00 |

Таблица 3 демонстрирует вычисленный порог частоты обмена данными при параметрах α = 0,70 и B = 921 600 бод. В базовых условиях отправка сжатого кадра с частотой 25 сообщений в секунду использует 32,55 % пропускной способности UART, тогда как при 40 сообщениях/с показатель ROI составляет 7,81 %. Если добавить к каждому сообщению 64 байта служебной информации, доля занятой ёмкости возрастет до 34,29 % и 10,59 % соответственно. Поскольку размер заголовка h, использованный в работе [1], не был верифицирован, полученные данные отражают чувствительность модели к выбранному значению этого параметра.

**Пороговое время выделения ROI.** При опубликованных размерах кадра и области интереса (ROI), равных 1200 и 180 байт соответственно, а также нулевых значениях hкадр и hROI, пороговое значение tROI,max составляет 11,07 мс (расчет: 10(1200 – 180)/921600). В случае, если процесс выделения ROI на микроконтроллере ESP32 занимает времени меньше указанного порога, происходит сокращение совокупного времени, включающего время передачи и минимальную задержку. Когда же hROI увеличивается до 64 байт при hкадр = 0, порог снижается до 10,37 мс. Следует отметить, что полученные числовые значения не отражают реальное

ускорение системы, так как в источнике [1] отсутствуют данные о времени выделения ROI и других этапах формирования общей задержки.

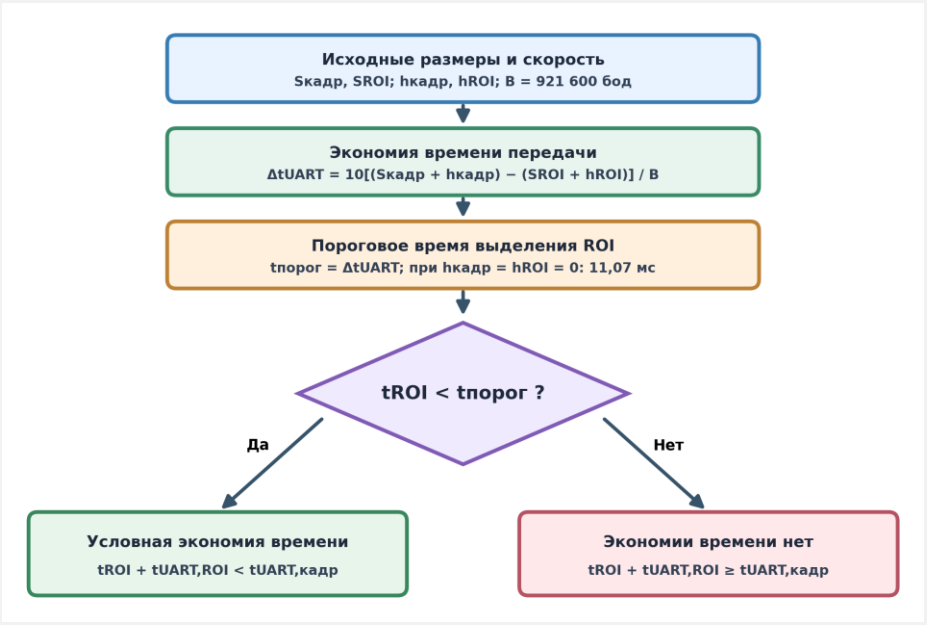



Рисунок 7. Блок-схема оценки порогового времени выделения области интереса

Рисунок 7 демонстрирует алгоритм вычисления порогового значения времени для выделения целевой области. Величина порога 11,07 мс определена для отдельного пакета данных при размере кадра 1200 байт и области интереса (ROI) 180 байт, без учета служебных заголовков. Для подтверждения практической целесообразности требуется экспериментальное измерение времени сегментации ROI на микроконтроллере ESP32-CAM, поскольку в источнике [1] такие данные не приводятся. Предложенная модель учитывает исключительно длительность процесса выделения и теоретическое время передачи, не охватывая общую задержку обработки события.

**Последовательная отправка серии сообщений.** На рисунке 8 представлена минимальная продолжительность последовательной передачи пакета из N сообщений равного объема. Для четырех сообщений (N=4) время составляет 52,08 мс для сжатых кадров и 7,81 мс для области интереса (ROI) без служебных байтов; в обоих случаях последний пакет ожидает завершения передачи трех предыдущих. При увеличении количества до десяти (N=10) эти значения возрастают до 130,21 и 19,53 мс соответственно. Данный сценарий применяется для оценки

воздействия одновременного поступления сообщений и не отражает фактическую временную последовательность событий, описанную в опубликованных материалах.

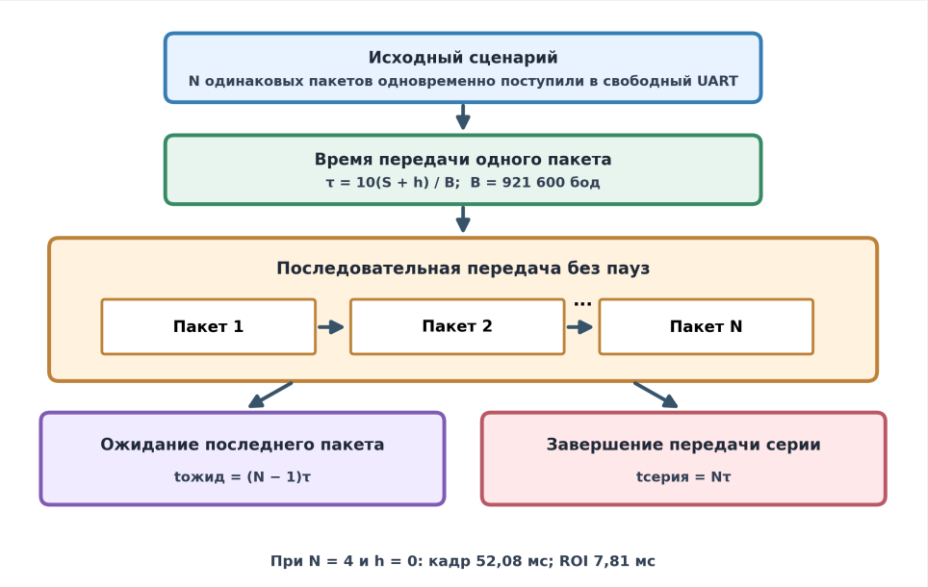



Рисунок 8. Блок-схема расчёта времени последовательной передачи серии сообщений

Проект предусматривает параллельный прием N идентичных пакетов через свободный UART-интерфейс, осуществляемый непрерывно, без временных задержек, при использовании стандарта 8N1. В качестве примера взяты размеры кадра: S = 1200 байт для сжатого формата и S = 180 байт для ROI. Данные о фактических интервалах поступления сообщений, очередях и повторениях, содержащихся в опубликованных источниках [1], отсутствуют.

**Результаты.** В представленном материале изложены итоги вычислительного исследования параметров связи в системе видеонаблюдения событийного типа, реализованной на базе микросхем ESP32-CAM и FPGA. Оперируя данными из источника [1], авторы оценили степень задействованности порта UART, длительность минимальной отправки сообщений и запас емкости канала при использовании разных форматов данных. Проанализированы три независимые ситуации: отправка сжатого изображения, выделенной зоны интереса (ROI) и итогов обнаружения. Кроме того, изучено воздействие служебных байтов и последовательной передачи пакетов, а также сопоставлены опубликованные значения задержек для систем с ESP32-CAM и с добавлением FPGA. Расчетные данные помогают выявить ограничения коммуникации и обосновать выбор формата сообщения. Важно отметить, что полученные оценки времени передачи не включают задержки, связанные с обработкой, очередями и публикацией в сети.

Таблица 4. Расчётные показатели UART при 921 600 бод, 8N1

| Передаваемые данные | Нагрузка, Б/с | Загрузка, % | $t_s$, мс | $t_{95}$,разм, мс |
|---|---|---|---|---|
| Сжатый кадр | 30 000 | 32,55 | 13,02 | 17,36 |
| Область интереса / признаки | 7 200 | 7,81 | 1,95 | 2,60 |
| Результат обнаружения | 2 560 | 2,78 | 0,69 | 1,04 |

Как показывает анализ данных таблицы 4, при использовании потока сжатых видеоданных доля полезной информации, передаваемой в зонах повышенного интереса,

снижается на 76,0 %, тогда как для сообщений с итоговыми результатами этот показатель достигает 91,5 %. В результате вычислительная задержка при отправке одного усредненного сообщения сокращается на 11,07 и 12,33 миллисекунды соответственно. Полученные цифры отражают характеристики транспортировки данных в теоретически идеальном интерфейсе и не учитывают фактическое местоположение процесса извлечения признаков; размещение данного алгоритма на микроконтроллере ESP32 неизбежно приведет к увеличению локальных вычислительных затрат.

Таблица 5. Повторное представление опубликованных квантилей задержки [1]

| Квантиль | ESP32, мс | ESP32 + FPGA, мс | Разница, мс | Снижение, % |
|---|---|---|---|---|
| P50 | 620 | 480 | 140 | 22,58 |
| P95 | 980 | 780 | 200 | 20,41 |
| P99 | 1300 | 1050 | 250 | 19,23 |

В таблице 5 разница медианных значений составляет 140 мс, тогда как выигрыш при передаче среднего кадра и сообщения с результатом оценивается всего в 12,33 мс. Нельзя однозначно связывать всю эту разницу исключительно с обменом по интерфейсу UART, поскольку итоговая задержка формируется под воздействием множества факторов: получения кадра, состояния очереди интерфейса, процессов обработки, работы Wi-Fi-модуля и времени ответа сервера. Подобным образом, сокращение показателя P99 на 250 мс свидетельствует об изменении хвостовых задержек в масштабах всей системы, однако без детальной временной разметки каждого этапа невозможно точно определить вклад FPGA.

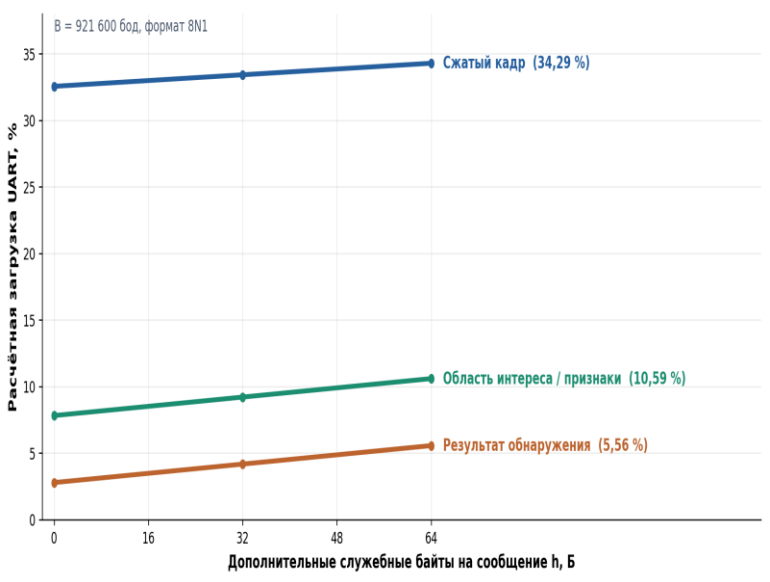



Рисунок 9. Чувствительность расчётной загрузки UART к дополнительным байтам на сообщение (сценарный расчёт по данным [1])

На рисунке 9 продемонстрировано, что при неизменной частоте отправки пакетов увеличение размера служебной заголовочной части приводит к линейному росту нагрузки. Крутизна этой зависимости варьируется в зависимости от скорости передачи: для режима 40 пакетов в секунду она равна примерно 0,043 процентного пункта на каждый добавленный байт, тогда как для 25 пакетов/с – около 0,027. Важно отметить, что представленный график отражает лишь теоретические данные, не учитывая фактический объем переданного трафика, а также

игнорирует такие факторы, как наличие очередей и необходимость повторной передачи данных.

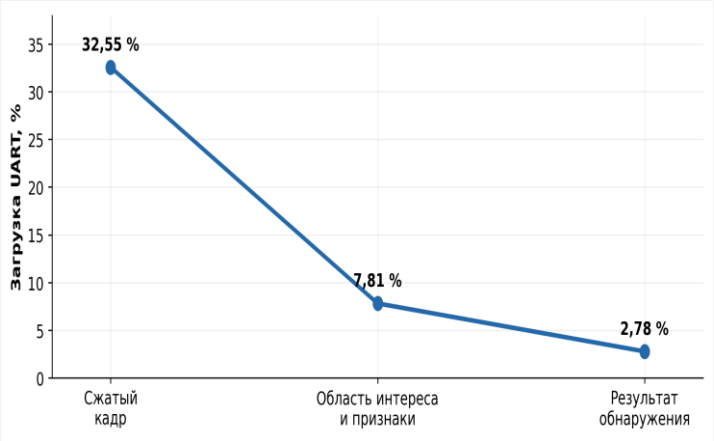



Рисунок 10. Расчётная загрузка UART для трёх типов сообщений

На рисунке 10 представлена расчетная загрузка интерфейса UART: 32,55 % для сжатых кадров, 7,81 % для областей интереса и 2,78 % для данных обнаружения. На рисунке 6 показано минимальное время передачи, рассчитанное при среднем размере пакета, а также значения P95. При этом следует отметить, что показатели P95 по размеру не отражают квантили фактической задержки. Оба графика сформированы на основе исходных данных, приведенных в источнике [1].

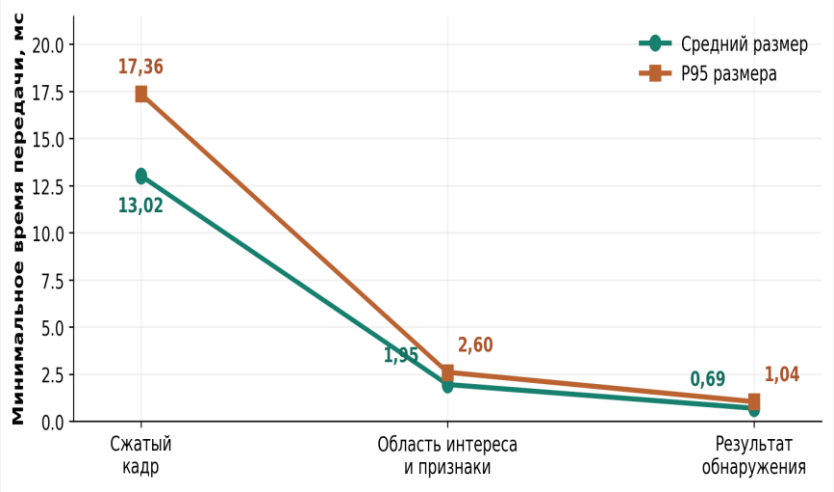



Рисунок 11. Минимальное время передачи сообщений среднего размера и размера P95

На рисунке 11 представлена расчетная минимальная продолжительность отправки сообщений по интерфейсу UART, рассчитанная для среднего размера пакета и значения P95. Для сжатого кадра эти показатели равны 13,02 и 17,36 миллисекунды соответственно; для области интереса –1,95 и 2,60 мс, а для результата обнаружения – 0,69 и 1,04 мс. Важно отметить, что в данном контексте параметр P95 характеризует объем передаваемых данных (размер пакета), а не фактическое время задержки при передаче.

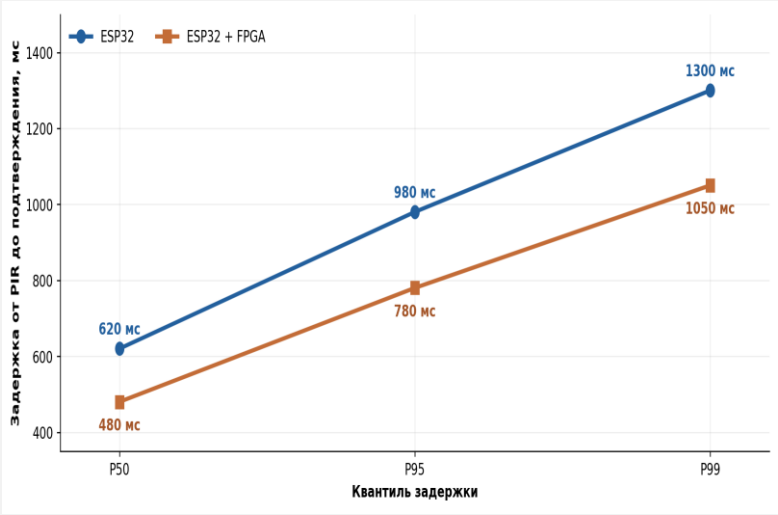



Рисунок 12. Опубликованные квантили полной задержки для режимов ESP32 и ESP32 + FPGA [1]

Как показано на рисунке 12, конфигурация ESP32 совместно с FPGA демонстрирует более низкие значения квантилей P50, P95 и P99, уменьшение которых составляет 140, 200 и 250 мс соответственно. Поскольку эти метрики отражают общую длительность цикла от срабатывания датчика PIR до успешной публикации данных, они не позволяют изолированно оценить время вычислений на стороне FPGA.

Разница медианных задержек достигает 140 мс, в то время как экономия времени исключительно на передаче среднего кадра и сообщения с результатом оценивается всего в 12,33 мс. Приписывать всю выявленную разницу исключительно обмену данными по интерфейсу UART некорректно, так как итоговая задержка формируется под влиянием множества факторов: захвата видеопотока, состояния очереди интерфейса, процессов обработки, работы модуля Wi-Fi и времени ответа сервера. Подобным образом, снижение показателя P99 на 250 мс свидетельствует об улучшении показателей «хвостовых» задержек всей системы в целом, однако без детальной маркировки каждого этапа процесса невозможно точно определить долю вклада FPGA в это улучшение.

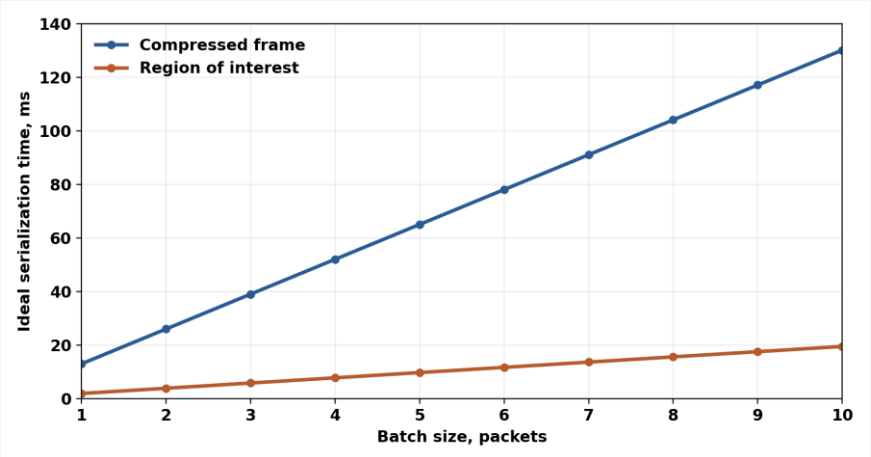



Рисунок 13. Минимальное время передачи серии сообщений через UART при h = 0

На рисунке 13 показано наименьшее время, необходимое для отправки пакета данных по интерфейсу UART при условии h = 0. Заданные значения резерва частоты, порога определения области интереса (ROI) и параметров серии сообщений формируют набор проверяемых ограничений для предстоящих тестов. Для проведения проверки необходимо наличие временных меток момента создания ROI, а также временных показателей начала и завершения передачи каждого отдельного пакета. Кроме того, требуются данные о служебных полях и состоянии очереди UART. Отсутствие этой информации не позволяет достоверно определить реальное снижение задержки или корректно соотнести наблюдаемую разницу квантилей с конкретной стадией процесса.

**Заключение.** Исследования показали, что передача только области интереса (ROI) вместо целого кадра уменьшает вычислительную нагрузку на интерфейс UART на 76%. Установлено пороговое значение времени формирования ROI, составляющее 11,07 мс, что позволяет определить целесообразность применения предварительной обработки изображения. Анализ существующих данных свидетельствует о сокращении медианной задержки системы ESP32-CAM с FPGA на 22,58 %, однако степень влияния отдельных этапов обработки остается неясной. В перспективе требуется экспериментальная верификация предложенных расчетных зависимостей, измерение задержек на каждом этапе и оценка стабильности работы системы при высокой частоте событий.

## Литература

1. Adilzhanova S. et al. A Hardware Platform for Smart Video Monitoring Based on ESP32-CAM and Mojo FPGA (Spartan-6) with Event Activation Triggered by a PIR Sensor**.** *ETASR*, 2026. DOI: 10.48084/etasr.18359.
2. Nowroz S. T. et al. A Benchmark Reference for ESP32-CAM Module**.** 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2505.24081.
3. Abordo P. R. C. et al. **S**mart surveillance system using ESP32 and camera-based motion detection with IM technolog**y.** *International Journal of Research Studies in Educational Technology*, 2024. DOI: 10.5861/ijrset.2024.8012.
4. Okokpujie K. et al. Development of an Affordable Real-Time IoT-Based Surveillance System Using ESP32 and TWILIO API**.** *Journal of Safety and Security Engineering*, 2023. DOI: 10.18280/ijsse.130609.
5. Zhaxalikov A. et al. Surveillance Camera Using Wi-Fi Connection**.** *Procedia Computer Science*, 2024. DOI: 10.1016/j.procs.2023.12.147.
6. Design and Implementation of ESP32-Based Edge Computing for Object Detection**.** *Sensors*, 2025. DOI: 10.3390/s25061656..
7. ESP32-CAM as a Programmable Camera Research Platform**.** *Electronic Imaging*, 2022. Lech P. et al. A Low-Cost Energy-Efficient IoT Camera Trap Network for Remote Forest Surveillance**.** *Electronics*, 2025. DOI: 10.3390/electronics14214266.
8. Hahn F. et al. Mango Fruit Fly Trap Detection Using Different Wireless Communications**.** *Agronomy*, 2023. DOI: 10.3390/agronomy13071736.
9. Kok C. L. et al. Energy-, Cost-, and Resource-Efficient IoT Hazard Detection System with Adaptive Monitoring**.** *Sensors*, 2025. DOI: 10.3390/s25061761.
10. Sarkar et al. FPGACam: A FPGA based efficient camera interfacing architecture for real time video processing**.** *IET Circuits, Devices & Systems*, 2021. DOI: 10.1049/cds2.12074.
11. Yan Z. et al. An FPGA-Based YOLOv5 Accelerator for Real-Time Industrial Vision Applications**.** *Micromachines*, 2024. DOI: 10.3390/mi15091164.
12. Zeng K. et al. FPGA-based accelerator for object detection: a comprehensive survey. *The Journal of Supercomputing*, 2022. DOI: 10.1007/s11227-022-04415-5.
13. Hozhabr S. H., Giorgi R. A Survey on Real-Time Object Detection on FPGAs**.** *IEEE Access*, 2025. DOI: 10.1109/ACCESS.2025.3544515.

14. Heng C. W. et al. Optimizing FPGA-based YOLO series accelerators: A survey of techniques. *Neurocomputing*, 2025. DOI: 10.1016/j.neucom.2025.130874.
15. Al-Shamma O., Fadhel M. A. Trusted outdoor multi-camera tracking system powered by FPGA. *Journal of Engineering Research*, 2025. DOI: 10.1016/j.jer.2024.10.010.
16. Chowdhury M. R. Z. et al. Towards Next-Generation FPGA-Accelerated Vision-Based Autonomous Driving: A Comprehensive Review. *Signals*, 2025. DOI: 10.3390/signals6040053.
17. Al Amin R., Obermaisser R. Real-Time Object Detection and Classification using YOLO for Edge FPGAs. *ELMAR*, 2025. DOI: 10.1109/ELMAR66948.2025.11193980.
18. Shimoda M., Sato S., Nakahara H. Power Efficient Object Detector with an Event-Driven Camera for Moving Object Surveillance on an FPGA // *IEICE Transactions on Information and Systems*. 2019. Vol. E102-D, No. 5. P. 1020–1028. DOI: 10.1587/transinf.2018RCP0005
19. Kryjak T. Event-Based Vision on FPGAs — a Survey. *Euromicro DSD*, 2024. DOI: 10.1109/DSD64264.2024.00078.
20. Gallego G. et al. Event-Based Vision: A Survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2022. DOI: 10.1109/TPAMI.2020.3008413.
21. Gao Y. et al. REMOT: A Hardware-Software Architecture for Attention-Guided Multi-Object Tracking with Dynamic Vision Sensors on FPGAs. *ACM/SIGDA FPGA*, 2022. DOI: 10.1145/3490422.3502365.
22. Liu M., Delbruck T. EDFLOW: Event Driven Optical Flow Camera With Keypoint Detection and Adaptive Block Matching // *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 2022. Vol. 32, No. 9. P. 5776–5789. DOI: 10.1109/TCSVT.2022.3156653
23. Lu Y., Shi Y., Li Z., Li J., Kim T. T.-H. A Real-Time Event Vision Sensor Based Object Detection and Tracking System for Edge Applications // *2024 IEEE Asian Solid-State Circuits Conference (A-SSCC)*. P. 1–3. DOI: 10.1109/A-SSCC60305.2024.10849082
24. Honarparvar S., Saeedi S., Liang S., Squires J. Design and Development of an Internet of Smart Cameras Solution for Complex Event Detection in COVID-19 Risk Behaviour Recognition // *ISPRS International Journal of Geo-Information*. 2021. Vol. 10, No. 2. Article 81. DOI: 10.3390/ijgi10020081

## References

1. Adilzhanova S. et al. A Hardware Platform for Smart Video Monitoring Based on ESP32-CAM and Mojo FPGA (Spartan-6) with Event Activation Triggered by a PIR Sensor. ETASR, 2026. DOI: 10.48084/etasr.18359.
2. Nowroz S. T. et al. A Benchmark Reference for ESP32-CAM Module. 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2505.24081.
3. Abordo P. R. C. et al. Smart surveillance system using ESP32 and camera-based motion detection with IM technology. International Journal of Research Studies in Educational Technology, 2024. DOI: 10.5861/ijrset.2024.8012.
4. Okokpujie K. et al. Development of an Affordable Real-Time IoT-Based Surveillance System Using ESP32 and TWILIO API. Journal of Safety and Security Engineering, 2023. DOI: 10.18280/ijsse.130609.
5. Zhaxalikov A. et al. Surveillance Camera Using Wi-Fi Connection. Procedia Computer Science, 2024. DOI: 10.1016/j.procs.2023.12.147.
6. Design and Implementation of ESP32-Based Edge Computing for Object Detection. Sensors, 2025. DOI: 10.3390/s25061656..
7. ESP32-CAM as a Programmable Camera Research Platform. Electronic Imaging, 2022. Lech P. et al. A Low-Cost Energy-Efficient IoT Camera Trap Network for Remote Forest Surveillance. Electronics, 2025. DOI: 10.3390/electronics14214266.
8. Hahn F. et al. Mango Fruit Fly Trap Detection Using Different Wireless Communications. Agronomy, 2023. DOI: 10.3390/agronomy13071736.
9. Kok C. L. et al. Energy-, Cost-, and Resource-Efficient IoT Hazard Detection System with Adaptive Monitoring. Sensors, 2025. DOI: 10.3390/s25061761.

10. Sarkar et al. FPGACam: A FPGA based efficient camera interfacing architecture for real time video processing. IET Circuits, Devices & Systems, 2021. DOI: 10.1049/cds2.12074.

11. Yan Z. et al. An FPGA-Based YOLOv5 Accelerator for Real-Time Industrial Vision Applications. Micromachines, 2024. DOI: 10.3390/mi15091164.

12. Zeng K. et al. FPGA-based accelerator for object detection: a comprehensive survey. The Journal of Supercomputing, 2022. DOI: 10.1007/s11227-022-04415-5.

13. Hozhabr S. H., Giorgi R. A Survey on Real-Time Object Detection on FPGAs. IEEE Access, 2025. DOI: 10.1109/ACCESS.2025.3544515.

14. Heng C. W. et al. Optimizing FPGA-based YOLO series accelerators: A survey of techniques. Neurocomputing, 2025. DOI: 10.1016/j.neucom.2025.130874.

15. Al-Shamma O., Fadhel M. A. Trusted outdoor multi-camera tracking system powered by FPGA. Journal of Engineering Research, 2025. DOI: 10.1016/j.jer.2024.10.010.

16. Chowdhury M. R. Z. et al. Towards Next-Generation FPGA-Accelerated Vision-Based Autonomous Driving: A Comprehensive Review. Signals, 2025. DOI: 10.3390/signals6040053.

17. Al Amin R., Obermaisser R. Real-Time Object Detection and Classification using YOLO for Edge FPGAs. ELMAR, 2025. DOI: 10.1109/ELMAR66948.2025.11193980.

18. Shimoda M., Sato S., Nakahara H. Power Efficient Object Detector with an Event-Driven Camera for Moving Object Surveillance on an FPGA // IEICE Transactions on Information and Systems. 2019. Vol. E102-D, No. 5. P. 1020–1028. DOI: 10.1587/transinf.2018RCP0005

19. Kryjak T. Event-Based Vision on FPGAs — a Survey. Euromicro DSD, 2024. DOI: 10.1109/DSD64264.2024.00078.

20. Gallego G. et al. Event-Based Vision: A Survey. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2022. DOI: 10.1109/TPAMI.2020.3008413.

21. Gao Y. et al. REMOT: A Hardware-Software Architecture for Attention-Guided Multi-Object Tracking with Dynamic Vision Sensors on FPGAs. ACM/SIGDA FPGA, 2022. DOI: 10.1145/3490422.3502365.

22. Liu M., Delbruck T. EDFLOW: Event Driven Optical Flow Camera With Keypoint Detection and Adaptive Block Matching // IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. 2022. Vol. 32, No. 9. P. 5776–5789. DOI: 10.1109/TCSVT.2022.3156653

23. Lu Y., Shi Y., Li Z., Li J., Kim T. T.-H. A Real-Time Event Vision Sensor Based Object Detection and Tracking System for Edge Applications // 2024 IEEE Asian Solid-State Circuits Conference (A-SSCC). P. 1–3. DOI: 10.1109/A-SSCC60305.2024.10849082

24. Honarparvar S., Saeedi S., Liang S., Squires J. Design and Development of an Internet of Smart Cameras Solution for Complex Event Detection in COVID-19 Risk Behaviour Recognition // ISPRS International Journal of Geo-Information. 2021. Vol. 10, No. 2. Article 81. DOI: 10.3390/ijgi10020081

**MRNTI: 16.41.25**
**DOI: https://doi.org/10.66941/3106-9037/2026/iss3pp68-76**

**Mirzayev F.R.*, Jafarova G.K.**

*Ganja Branch of the Azerbaijan National Academy of Sciences, 419 Heydar Aliyev Avenue, AZ 2003, Ganja, Azerbaijan*

## ARTIFICIAL INTELLIGENCE FOR THE DIGITAL PRESERVATION OF GANJA-GAZAKH-KARABAKH DIALECTS

**Mirzayev F.R.,** Master's degree, Head of the Department of Artificial Intelligence and Digitalization;
E-mail: grem2011@gmail.com; ORCID id: 0009-0006-6303-2343
**Jafarova G.Kh.,** Master's degree, Scientific Secretary;
E-mail: gunayceferova.0125@gmail.com; https://orcid.org/ : 0000-0001-6990-4305

**Abstract** .The article examines the digital transformation of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects and patois of the Azerbaijani language in the context of artificial intelligence (AI) technologies. The purpose of the study is to develop a conceptual model that reconciles the preservation of dialectal diversity with the development of the national digital language infrastructure. The tasks include determining the structural requirements of a dialect corpus, designing an institutional cooperation model, systematizing AI applications, and analyzing the ethical contradictions between standardization and diversity. Comparative-historical, systemic and content-analysis methods and theoretical generalization were applied to scholarly literature and international documents. The results show that annotated corpora enriched with sociolinguistic metadata are a precondition for dialect-oriented AI technologies, while systematic cooperation among the state, academic institutions and the technology sector ensures their sustainability. It is concluded that inclusive AI-based language technologies can shift dialects from archiving to active everyday use.

**Keywords:** Azerbaijani language, Ganja-Gazakh-Karabakh dialects, dialect preservation, artificial intelligence, digital transformation, language policy, corpus linguistics.

**Acknowledgments.** The work was carried out within the institutional research plan of the Ganja Branch of the Azerbaijan National Academy of Sciences.

For citation: Mirzayev F.R., Jafarova G.Kh. Artificial intelligence for the digital preservation of Ganja-Gazakh-Karabakh dialects / Journal "Science of Intelligent Systems". 2026. Vol. [2]. No. [2]. P. [9-20]. Language of the article: English; (issue [2]), https://doi.orghttps:// 10.66941/3106-9037/2026/iss2pp9-20

**Ф.Р. Мирзаев*, Г.Х. Джафарова**

*Гянджинское отделение Национальной академии наук Азербайджана, проспект Гейдара Алиева, 419, AZ 2003, г. Гянджа, Азербайджан*

## ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В ЦИФРОВОМ СОХРАНЕНИИ ГЯНДЖА-ГАЗАХСКО-КАРАБАХСКИХ ДИАЛЕКТОВ

**Мирзаев Ф.Р.,** магистр, заведующий отделом искусственного интеллекта и цифровизации;
E-mail: grem2011@gmail.com; https://doi.org/ 0009-0006-6303-2343
**Джафарова Г.Х.,** магистр, научный секретарь;
E-mail: gunayceferova.0125@gmail.com; https://doi.org/ 0000-0001-6990-4305

**Аннотация**. В статье рассматривается цифровая трансформация Гянджа-Газахско-Карабахских диалектов и говоров азербайджанского языка в контексте технологий искусственного интеллекта (ИИ). Цель исследования – разработать концептуальную модель, согласующую сохранение диалектного многообразия с развитием национальной цифровой языковой инфраструктуры. Задачи включали определение структурных требований к диалектному корпусу, проектирование модели институционального сотрудничества, систематизацию направлений применения ИИ и анализ этических противоречий между стандартизацией и многообразием. Использованы сравнительно-исторический метод, системный анализ, контент-анализ и теоретическое обобщение научной литературы и международных документов. Показано, что аннотированные корпуса с социолингвистическими метаданными служат необходимым условием для ИИ-технологий, ориентированных на диалекты, а системное сотрудничество государства, науки и технологического сектора обеспечивает устойчивость процесса. Сделан вывод, что инклюзивные языковые технологии на основе ИИ позволяют перейти от архивирования диалектов к их активному повседневному использованию.

**Ключевые слова:** азербайджанский язык, гянджа-газахско-карабахские диалекты, сохранение диалектов, искусственный интеллект, цифровая трансформация, языковая политика, корпусная лингвистика.

**Благодарность.** Работа выполнена в рамках институционального плана исследований Гянджинского отделения Национальной академии наук Азербайджана.

**Для цитирования:** Мирзаев Ф.Р., Джафарова Г.Х. Искусственный интеллект в цифровом сохранении гянджа-газахско-карабахских диалектов / Журнал «Наука интеллектуальных систем». 2026. Т. [2_]. № [2]. С. [9-20]. Язык статьи: английский; (номер журнала [2]), https://doi.org/ 10.66941/3106-9037/2026/iss2pp9-20

**Ф.Р. Мирзаев*, Г.Х. Джафарова**

*Әзербайжан Ұлттық ғылым академиясының Гянджа бөлімшесі, Гейдар Әлиев даңғылы, 419, AZ 2003, Гянджа қ., Әзербайжан*

## ГЯНДЖА-ГАЗАХ-ҚАРАБАҚ ДИАЛЕКТІЛЕРІН ЦИФРЛЫҚ САҚТАУДАҒЫ ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ

**Мирзаев Ф.Р.,** магистр, жасанды интеллект және цифрландыру бөлімінің меңгерушісі;
E-mail: grem2011@gmail.com; https://doi.org/ 0009-0006-6303-2343
**Джафарова Г.Х.,** магистр, ғылыми хатшы;
E-mail: gunayceferova.0125@gmail.com; https://doi.org/ 0000-0001-6990-4305

**Аннотация.** Мақалада жасанды интеллект (ЖИ) технологиялары контекстінде әзербайжан тілінің Гянджа-Газах-Қарабақ диалектілері мен говорларын цифрлық трансформациялау мәселелері қарастырылады. Зерттеудің мақсаты – диалектілік алуантүрлілікті сақтауды ұлттық цифрлық тілдік инфрақұрылымды дамытумен үйлестіретін тұжырымдамалық модель әзірлеу. Міндеттерге диалект корпусына қойылатын құрылымдық талаптарды айқындау, институционалдық ынтымақтастық моделін жобалау, ЖИ қолдану бағыттарын жүйелеу және стандарттау мен алуантүрлілік арасындағы этикалық қайшылықтарды талдау кірді. Ғылыми әдебиет пен халықаралық құжаттарға салыстырмалы-тарихи әдіс, жүйелік талдау, контент-талдау және теориялық жалпылау қолданылды. Әлеуметтік-лингвистикалық метадеректермен аннотацияланған корпустар диалектілерге бағытталған ЖИ технологиялары үшін қажетті алғышарт екені, ал мемлекет, ғылым және технология секторы арасындағы жүйелі ынтымақтастық үдерістің тұрақтылығын қамтамасыз ететіні көрсетілді. Инклюзивті ЖИ негізіндегі тілдік технологиялар диалектілерді мұрағаттаудан оларды белсенді күнделікті қолдануға көшуге мүмкіндік береді деген қорытынды жасалды.

**Түйін сөздер:** әзербайжан тілі, Гянджа–Газах–Қарабақ диалектілері, диалектілерді сақтау, жасанды интеллект, цифрлық трансформация, тіл саясаты, корпустық лингвистика.

**Алғыс.** Жұмыс Әзербайжан Ұлттық ғылым академиясы Гянджа бөлімшесінің институционалдық зерттеу жоспары шеңберінде орындалды.

**Дәйексөз үшін:** Мирзаев Ф.Р., Джафарова Г.Х. Гянджа-Газах-Қарабақ диалектілерін цифрлық сақтаудағы жасанды интеллект / «Наука интеллектуальных систем» журналы. 2026. Т. [2]. № [2]. Б. [9-20]. Мақала тілі: ағылшын; (журнал нөмірі [2]), https://doi.org/ 10.66941/3106-9037/2026/iss2pp9-20

**Introduction**

The rapid development of digital technologies has fundamentally changed approaches to the preservation, documentation, and use of languages. For the Azerbaijani language, rich in Ganja-Gazakh-Karabakh dialects and patois, digital transformation creates both new opportunities and serious challenges. While artificial intelligence (AI) technologies make it possible to process, classify, and generate language material on a large scale, they simultaneously strengthen the dominance of standard language forms, increasing the risk that regional variants will be pushed into the shadows. This situation places a multifaceted task before researchers: to benefit from technological progress while at the same time preserving linguistic diversity.

The dialectological map of the Azerbaijani language is complex and rich; the Ganja-Gazakh-Karabakh group is one of its historically, phonetically, and lexically most distinctive branches (Shiraliyev, 2008; Akhundov, 1984; Hamzayev, 1992). These dialects are not merely an object of linguistic study but an inseparable part of the region's cultural life, traditions, and collective memory. Folklore examples – tales, bayati verses, laments, riddles – are among the principal means of carrying and sustaining the vitality of these dialects. The digital era is not content merely with archiving such materials; it creates additional opportunities to turn them into a living, actively used language resource.

The relevance of the topic is conditioned by several factors. First, the rate of loss of languages and dialects worldwide is increasing, and according to UNESCO, thousands of languages and dialects are endangered (UNESCO, 2010). Second, although the rapid development of AI technologies is expanding the possibilities for processing language resources, the question of who will benefit from these opportunities remains open: if dialect materials are not represented in the digital environment, they will remain outside the "field of vision" of future AI models. Third, the socio-economic processes taking place in the Ganja-Gazakh-Karabakh region, including urbanization and the weakening of intergenerational language transmission, are leading to a decrease in the number of living carriers of the dialects.

This article considers the digital transformation of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects as a strategic issue of linguistics and cultural heritage. The aim of the study is to develop a conceptual model that reconciles the preservation of dialectal diversity with the development of the national digital language infrastructure. The object of the study is the totality of technological, institutional, and ethical factors conditioning the digital transformation of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects and patois; its subject is the process of this transformation. To achieve the aim, the following tasks were set: determining the structural requirements of the dialect corpus; designing an institutional cooperation model; systematizing the possibilities for applying AI technologies in the dialect environment; and conducting an ethical analysis of the contradictions between standardization and diversity. The hypothesis of the study is that the digitalization of dialect resources within an institutional framework, in accordance with ethical principles, can create a sustainable model ensuring both their preservation and their active use. The study relies on the approaches of corpus linguistics, computational sociolinguistics, and documentary linguistics, and uses the comparative-historical method, systemic analysis, content analysis, and theoretical generalization.

The scientific novelty of the study lies in the fact that, for the first time, the process of digital transformation of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialect group is analyzed within a unified conceptual framework – a synthesis of the resource, institutional cooperation, and ethical dimensions. The theoretical significance of the work lies in the fact that it synthesizes knowledge accumulated in the fields of corpus linguistics, computational sociolinguistics, and documentary linguistics on the basis of the material of a specific regional dialect group, thereby proposing a model for the practical application of theoretical generalizations. In terms of practical significance, the results of the work can serve to

define concrete lines of action for state institutions, scientific establishments, and technology companies.

The structure of the article is as follows. The section "Research materials and methods" describes the methodology and the material of the study. The section "Discussion" reviews the scholarly literature and international experience. The section "Results" analyzes, in sequence, the structural requirements of the dialect corpus, the institutional cooperation model, AI applications, standardization and ethical challenges, lexical-semantic aspects, risks, and the strategy of integration into education, and then summarizes the findings. The "Conclusion" sums up the work and identifies directions for future research.

**Research materials and methods Methodology**

The methodological basis of the study is formed by the scientific approaches developed in the fields of corpus linguistics (McEnery & Hardie, 2012), computational sociolinguistics (Nguyen et al., 2016), and documentary linguistics (Himmelmann, 1998). The following methods were used: the comparative-historical method (comparison of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects with dialects of other Turkic languages); the systemic analysis method (modeling institutional links among the state, science, and technology sectors); the content-analysis method (analysis of the existing scholarly literature and international documents); and the method of theoretical generalization.

The research questions are as follows. What structural requirements must a dialect corpus meet in order to serve as a basis for AI applications? What institutional model can ensure the sustainability of digital dialect projects? Which AI technologies can move dialects from archiving to active use? How can the contradictions between standardization and dialectal diversity be resolved ethically? The hypothesis of the study is formulated in the Introduction.

The study was carried out in five stages: (1) selection of sources and identification of the problem field; (2) content analysis of the scholarly literature and international documents; (3) comparative analysis of international experience with low-resource languages and dialects; (4) modeling of the institutional cooperation scheme and systematization of AI applications; (5) ethical analysis and theoretical generalization of the findings.

**Material of the study**

The material of the study is qualitative in nature. It comprises twenty sources listed in the References: six works in Azerbaijani (including the dialectological studies of Shiraliyev, Akhundov, and Hamzayev, and the materials on the national corpus published by the Institute of Linguistics of the Azerbaijan National Academy of Sciences (ANAS)) and fourteen international works, including UNESCO's atlas of endangered languages and descriptions of similar projects in world practice, in particular AI tools developed for low-resource languages and dialects.

The study is based on published sources; no new primary field data were collected at this stage. The novelty in the use of the material consists in bringing together dialectological, computational, and sociolinguistic sources, which have so far been considered separately, in the analysis of one regional dialect group.

**Discussion**

The topic of the digital preservation of dialects has gained particular importance in international linguistics in recent decades. Jurafsky and Martin (2023), systematizing the methods of speech and language processing, describe approaches whose quality depends heavily on the volume of training data; this dependence creates specific difficulties for low-resource language variants such as dialects. Nguyen et al. (2016), in their survey of computational sociolinguistics, show that language use can be studied in relation to social variables (age, gender, region) by computational methods, which substantiates the importance of enriching dialect materials with metadata.

The concept of the "Bender Rule", put forward by Bender (2019), emphasizes the necessity of explicitly stating the name and characteristics of the language in the development of language technologies; this approach is important for preventing dialect diversity from remaining "invisible" in AI models. Himmelmann (1998) substantiates documentary linguistics as a field aimed at creating a lasting, multipurpose record of a language, which forms one of the methodological foundations of the present study. McEnery and Hardie (2012), describing the methodological tools of corpus linguistics, show the direct impact of balanced and annotated corpora on the quality of language technologies.

In the local scholarly literature, Shiraliyev's (2008) work "Fundamentals of Azerbaijani Dialectology" is a fundamental source providing a systematic description of the phonetic and morphological features of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialect group. Akhundov (1984) and Hamzayev (1992) further deepened this direction, proposing additional criteria for the classification of dialects and patois. Alizadeh's (2016) work "Dialects of Western Azerbaijan" is significant from the point of view of comparative analysis of neighboring dialect groups. UNESCO's (2010) atlas, by documenting the pace of loss of dialects and less-spoken languages worldwide, substantiates the necessity of taking urgent measures. In this context, the work carried out by the Institute of Linguistics of ANAS (2021) on the national corpus project is an indicator of the institutional foundation forming within the country in this direction.

In world practice, there are a number of successful projects in the field of digital preservation of low-resource languages and dialects. Most of them are based on three common principles: community-based data collection, the use of open-source software, and compliance with long-term archiving standards (Hinton, Huss & Roche, 2018). The community-based approach means that dialect speakers are engaged as active participants in the project rather than as passive sources of information; this both increases the quality of the data and strengthens the community's sense of ownership over its own language.

Grenoble and Whaley (2006), in their systematic analysis of language revitalization, show that the main feature of successful revitalization projects is that technology is applied not as a solution on its own but as part of a broader social and educational strategy. Crystal (2000), analyzing the social mechanisms of language death, emphasizes that the interruption of intergenerational transmission is the main risk factor; from this point of view, digital tools that attract the attention of the younger generation (mobile applications, social media integration) are of particular importance. Trudgill (2000), examining the mechanisms of sociolinguistic change, shows that the relationship between the standard language and dialects is closely tied to social prestige. Labov (2001), in turn, substantiates through empirical research that language change is conditioned by social factors, which indicates the importance of taking social variables (age, education, place of residence) into account in the design of digital tools.

Bauman and Briggs (1990), within the framework of the theory of verbal performance, note the importance of documenting not only the linguistic but also the performative characteristics of folklore texts – genres such as tales, bayati verses, and laments. Bucholtz and Hall (2005), within the framework of the theory of identity and interaction, analyze the role played by language choice in the construction of social identity; this approach shows the importance of evaluating dialect use not merely as a linguistic fact but as an expression of social identity. Thus, the general lesson drawn from international experience is that technological solutions produce more sustainable results when linked to sociolinguistic theory.

Nevertheless, the number of systematic works in the existing literature on the integration of the rich dialectological heritage of the Ganja-Gazakh-Karabakh region with AI technologies remains limited. The Azerbaijani dialectological studies describe the dialects but do not address their digital representation, while the international works on low-resource languages do not take into account the specific features of this dialect group. The present study fills this gap.

**Results Structure and technological foundations of the dialect corpus**

One of the decisive factors in the digital transformation of the Azerbaijani language is the creation of large-scale, structured, and high-quality digital language resources (McEnery & Hardie, 2012). Text corpora, Ganja-Gazakh-Karabakh dialect materials, and audio archives play the role of the basic infrastructure for AI applications such as automatic speech recognition, dialect identification, and text generation (Jurafsky & Martin, 2023).

The dialect corpus should consist not only of old written texts but also of modern spoken language, folklore examples (tales, laments, riddles, bayati verses), as well as sociolinguistic interviews. The phonetic, morphological, and lexical features of the dialect should be annotated in detail within the corpus. Metadata related to each text or audio recording (the age, gender, place of residence, occupation, and language environment of the information source) should be collected; this provides valuable data for studying the social dynamics of language change (Nguyen et al., 2016). Open-source platforms (ELAN, Praat, LaBB-CAT) and corpus management systems can be used for the creation and management of the corpus.

The most valuable material in the study of dialects is living speech (Himmelmann, 1998). Systematic field research should be conducted in various parts of the region, with high-quality audio and video recordings collected, transcribed, and turned into archives that are open while personal data is protected. These archives will serve as a primary data source not only for linguists but also for the training of AI models. The absence of sufficiently annotated and balanced databases for the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects seriously limits the functionality of AI models. For this reason, the creation of dialect resources should be evaluated not merely as a technical project but as a strategic component of national language policy and cultural heritage preservation.

**Institutional cooperation model**

The effective application of digital language technologies is not possible through individual and scattered initiatives. Achieving sustainable results requires systematic institutional cooperation among state structures, academic scientific institutions, and the technology sector. At the state level, the Ministry of Culture, the Ministry of Education, and relevant state agencies should prepare a unified strategy and regulatory framework for the digital preservation of the language and ensure the financing of projects.

In the scientific sphere, the Institute of Linguistics of ANAS, the Nakhchivan Branch of ANAS, and the philology faculties of leading universities act as the principal expert force in the areas of scientific methodology, data verification, and analysis (Institute of Linguistics of ANAS, 2021). In the technology sector, local and international IT companies and startups can participate in the development of technological solutions, platforms, and user interfaces. To institutionalize this tripartite cooperation, two concrete structures are proposed: a National Center for Digital Language Technologies, as an entity ensuring overall coordination and the creation of resources in accordance with unified standards; and Joint Linguistics and AI Laboratories, envisaged as a structure that transforms academic knowledge into practical technological applications. In these laboratories, for example, the development of transformer-architecture language models (BERT-type variants) adapted to the characteristics of the Azerbaijani language could be carried out.

**From archiving to active use: AI applications**

Traditional approaches in the field of dialect preservation have mainly been limited to documentation and archiving. Modern digital strategies, on the other hand, bring to the fore the active use, learning, and integration of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects into the everyday communication environment. AI technologies create broad opportunities in this direction (Jurafsky & Martin, 2023).

Automatic speech recognition (ASR) systems make it possible to convert dialectal speech into standard text; the training of these systems requires dialect audio archives, and they can be used in real-time transcription, archive search, and educational tools. The creation of virtual assistants capable of speaking with certain regional accents or dialectal features, based on text-to-speech (TTS) technologies, serves as a powerful means of preserving the sound of the dialect across generations. Dialect-affiliation identification tools accelerate dialectological research by automatically determining which specific patois of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialect a given text or speech fragment belongs to. Machine translation systems adapted to the dialect, in turn, can, at the initial stage at the lexical level, create the possibility of translating from standard Azerbaijani into the dialect or vice versa, thereby serving the creation of regional variants of literary texts.

In the direction of education and public outreach, gamified learning applications facilitate the learning and reinforcement of dialect words and expressions. An interactive platform called the “Dialect Map” could give users the opportunity to upload the language features of their own regions in audio or video format and become acquainted with the language materials of other regions. Virtual and augmented reality (VR/AR) applications create experiences that take the user into a virtual environment where the dialect is actively used – for example, a virtual village square. The development of lightweight applications capable of working in offline mode for mobile devices increases the accessibility of dialect resources, especially in the field of education, and strengthens their functional value.

**Standardization, digital norms, and ethical challenges**

Digital transformation also sharpens contradictions related to the standardization of the language. Spelling and grammar-checking systems, terminology platforms, and digital mechanisms applied in official document circulation strengthen the position of the standard language. This, in turn, can lead to

a narrowing of the sphere of use of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects (Bender, 2019). AI models tend to evaluate the variant with the most data – the standard language – as "normal" and the others as an "exception"; this can automatically push dialects into a marginal position. At the same time, the use of the standard language in official and business environments can be associated with "digital prestige", while the use of dialects can sometimes be associated with an unprofessional image (Trudgill, 2000).

Such a situation necessitates ethical and practical discussion. Language technologies should not only strengthen the normative language but should also support inclusive approaches that take dialect diversity into account (Bender, 2019). It is proposed to create separate, "alternative" rather than "corrective" models for dialects: systems should be able to offer the user a choice between the standard variant and the regional variant. The principle of user-centered design requires that technologies respect the user's language choice and not restrict it. The principle of data justice, in turn, requires attention to be paid to collecting samples from all social and age groups of the region in the creation of dialect databases. Inclusive AI models can contribute to linguistic equality in the digital environment by ensuring the parallel processing of standard and non-standard language forms.

**Lexical-semantic and toponymic aspects**

The lexical composition of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialect group reflects the historical-geographic characteristics of the region. Museyibov's (2010) research in the field of toponymy shows that the place names of the region are an important source in the formation of the lexical layers of the dialect, and the digital registration of these names should be an inseparable part of the dialect corpus. The AI-based processing of toponyms – for example, the automatic recognition and mapping of geographic names – can serve to functionally enrich the "Dialect Map" platform. Given the performative nature of folklore genres (Bauman & Briggs, 1990), the folklore part of the corpus should be formed not only as text but also in audio and video formats.

The systematization of differences between the dialect and the standard language at the lexical level has a direct impact on the quality of machine translation models. From this point of view, the creation of dialect-standard lexical correspondence dictionaries (parallel dictionaries) should be evaluated as a priority task. Such dictionaries can serve as a primary resource both for the training of translation models and for the preparation of educational materials. The deep structure–surface structure distinction put forward by Chomsky (1965) can theoretically be considered as a methodological framework for the development of lexical-grammatical translation models between dialects, although modern transformer-based models rely more on a statistical approach.

**Integration strategy in the education system**

The sustainability of the digital transformation of dialect resources is, first and foremost, conditioned by their integration into the education system. The teaching of dialect materials within elective courses at the secondary school level can be organically combined with the study of the region's history and cultural heritage. In this regard, digital tools – interactive dictionaries, audio games, animated folklore materials – can play an effective role in engaging students' interest. At the higher education level, the development of joint curricula between philology and computer science faculties creates the basis for the formation of a "Digital Dialectology" direction.

Teacher training is also an inseparable part of this process: professional development programs should be organized to prepare teaching staff capable of using dialect materials effectively while also being able to apply basic digital tools. In the media sphere, the use of dialect materials by regional broadcasting organizations, the preparation of folklore programs in podcast format, and the dissemination of dialect content on social media platforms can help direct the attention of broad segments of the population to this topic. In the field of public services, in the long-term perspective, the development of dialect-sensitive interfaces for regional users could increase digital accessibility, although at the present stage this should be evaluated more as a prospective direction.

The implementation of this multifaceted strategy should not be limited to the availability of technological solutions alone but should also envisage the positive shaping of society's attitude toward dialects. In this regard, public awareness campaigns, the linking of regional cultural festivals with digital platforms, and the active engagement of local communities in the process are additional factors ensuring the success of the strategy.

**Risks and limitations**

A number of risks must be taken into account in the application of the proposed model. First, limited financial resources may threaten the sustainability of long-term projects; for this reason, it is expedient to attract international grant programs and scientific foundations alongside state financing. Second, the protection of the personal data of dialect speakers requires particular sensitivity; from this point of view, the anonymization of data and the documentation of user consent should be applied as mandatory procedures.

Third, the quality of technological solutions is directly dependent on the size of the database; models built on small corpora may have a high error rate, which can reduce users' trust in the technology. To minimize this risk, a phased development strategy – pilot projects at the initial stage, followed by gradual expansion – is recommended. Fourth, the balance between standardization and diversity requires continuous monitoring at the institutional level; otherwise, even systems built with good intentions may lead to unequal outcomes.

**Summary of the results**

The research conducted has shown that the three main dimensions of the digital transformation of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects – the resource base, institutional cooperation, and the ethical framework – are interdependent. First, the absence of annotated corpora enriched with sociolinguistic metadata is the main obstacle limiting the functionality of AI models in the dialect environment. Second, without institutionalized cooperation mechanisms among the state, science, and technology sectors, scattered projects do not produce sustainable results. Third, when standardization processes are carried out without control, AI technologies carry the risk of squeezing out dialect diversity, which makes design approaches based on the principle of alternativity necessary.

These findings are consistent with the conclusion of Grenoble and Whaley (2006) that technology is effective only as part of a broader social and educational strategy, and with the position of Bender (2019) that language technologies must make the language variants they cover explicit. Unlike the earlier works, which treat the resource, institutional, and ethical aspects separately, the proposed model links them in the material of a single regional dialect group.

As a practical outcome of the study, three priority directions have been identified: the design of the dialect corpus and the launch of a pilot collection campaign; the development and open sharing of basic open-source ASR and TTS models; and the organization of a joint training program called "Digital Dialectology" for linguists and computer scientists. The consistent implementation of these directions can secure the future of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects both as an object of scientific research and as a living means of communication.

**Conclusion**

The aim of the study – to develop a conceptual model reconciling the preservation of dialectal diversity with the development of the national digital language infrastructure – has been achieved by means of content analysis, comparative analysis of international experience, systemic modeling, and theoretical generalization. The digital transformation of the Azerbaijani language is a multifaceted process encompassing technological, institutional, and cultural dimensions. Although AI creates unparalleled opportunities for the preservation and revitalization of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects, the realization of these opportunities depends on a strong digital resource base, institutional cooperation, and ethically grounded design approaches.

The article has substantiated that inclusive AI-based language technologies present a sustainable model reconciling the preservation of dialect diversity with the development of the national digital language infrastructure. The digital transformation of the Ganja-Gazakh-Karabakh dialects and patois cannot be evaluated as a purely technical project, nor as a purely humanitarian one; it is a complex national project requiring the synthesis of both fields. Its success depends on a change in society's attitude toward dialect diversity, the mobilization of scientific-technological potential, and the sustainability of institutional will. The results can be applied in practice by state institutions, academic establishments, and technology companies through the three priority directions identified above.

Future research should be deepened in the following directions: the expansion of dialect databases and their alignment with international standards (TEI, OLAC); the improvement of AI models sensitive to regional characteristics through few-shot and transfer learning methods; the study of ways to effectively integrate these technologies into education, media, and public communication spheres;

and research into the socio-psychological dynamics of the acceptance of dialects in the digital environment. In this way, technology can become a means not only of archiving the past but also of shaping the future of the regional varieties of the language, passing them on to future generations as a living means of communication and as an unparalleled cultural heritage.

**References**

1. Akhundov, A. A. (1984). Azərbaycan dilinin dialektologiyası [Dialectology of the Azerbaijani language]. Baku: Elm. (In Azerb.)

2. Alizadeh, A. (2016). Qərbi Azərbaycan dialektləri [Dialects of Western Azerbaijan]. Baku: Elm və Təhsil. (In Azerb.)

3. Azerbaijan National Academy of Sciences Institute of Linguistics. (2021). Azərbaycan milli korpusu: perspektivlər və çağırışlar [The Azerbaijani national corpus: perspectives and challenges]. Baku: ANAS Institute of Linguistics. (In Azerb.)

4. Bauman, R., & Briggs, C. L. (1990). Poetics and performance as critical perspectives on language and social life. Annual Review of Anthropology, 19, 59–88.

5. Bender, E. M. (2019). The BenderRule: on naming the languages we study and why it matters. The Gradient. Retrieved from https://thegradient.pub/the-benderrule-on-naming-the-languages-we-study-and-why-it-matters/

6. Bucholtz, M., & Hall, K. (2005). Identity and interaction: a sociocultural linguistic approach. Discourse Studies, 7(4–5), 585–614.

7. Chomsky, N. (1965). Aspects of the theory of syntax. Cambridge, MA: MIT Press.

8. Crystal, D. (2000). Language death. Cambridge: Cambridge University Press.

9. Grenoble, L. A., & Whaley, L. J. (2006). Saving languages: an introduction to language revitalization. Cambridge: Cambridge University Press.

10. Hamzayev, C. (1992). Azərbaycan dilinin dialektləri və şivələri [Dialects and patois of the Azerbaijani language]. Baku: Maarif. (In Azerb.)

11. Himmelmann, N. P. (1998). Documentary and descriptive linguistics. Linguistics, 36(1), 161–195.

12. Hinton, L., Huss, L., & Roche, G. (Eds.). (2018). The Routledge handbook of language revitalization. New York: Routledge.

13. Jurafsky, D., & Martin, J. H. (2023). Speech and language processing (3rd ed. draft). Retrieved from https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/

14. Labov, W. (2001). Principles of linguistic change: social factors. Oxford: Blackwell.

15. McEnery, T., & Hardie, A. (2012). Corpus linguistics: method, theory and practice. Cambridge: Cambridge University Press.

16. Museyibov, M. (2010). Azərbaycan toponimikası [Azerbaijani toponymy]. Baku: Maarif. (In Azerb.)

17. Nguyen, D., Doğruöz, A. S., Rosé, C. P., & de Jong, F. (2016). Computational sociolinguistics: a survey. Computational Linguistics, 42(3), 537–593.

18. Shiraliyev, M. (2008). Azərbaycan dialektologiyasının əsasları [Fundamentals of Azerbaijani dialectology]. Baku: Şərq-Qərb. (In Azerb.)

19. Trudgill, P. (2000). Sociolinguistics: an introduction to language and society (4th ed.). London: Penguin Books.

20. UNESCO. (2010). Atlas of the world's languages in danger (3rd ed.). Paris: UNESCO Publishing.

**IRSTI (МРНТИ) 89.25.21; 47.49.31**
**DOI: https://doi.org/10.66941/3106-9037/2026/iss3pp77-90**

**Meirambekuly N.[1], Saurova K.[2], Alipbayev K.[2], Khaniyeva A.[1], Khaniyev B.[1]***
*[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, 050040, Kazakhstan;*
*[2]Almaty University of Power Engineering and Telecommunications named after Gumarbek Daukeyev, Almaty, 050013, Kazakhstan.*
*E-mail: khaniyev.bakyt@gmail.com

# DIGITAL MODELING AND PERFORMANCE ANALYSIS OF A STAR TRACKER FOR SMALL SPACECRAFT

**Nursultan Meirambekuly,** PhD, Head of the Department for Analytics and Coordination of Research Projects, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
E-mail: nursultan.meirambekuly@kaznu.edu.kz, https://orcid.org/0000-0003-2250-4763
**Kamila Saurova,** Lecturer, Department of Space Engineering, Almaty University of Power Engineering and Telecommunications named after Gumarbek Daukeyev, Almaty, Kazakhstan;
E-mail: k.saurova@aues.kz, https://orcid.org/ 0009-0003-7960-8106
**Kuanysh Alipbayev,** PhD, Associate Professor, Vice-Rector for Science, Almaty University of Power Engineering and Telecommunications named after Gumarbek Daukeyev, Almaty, Kazakhstan;
E-mail: k.alipbayev@aues.kz, https://orcid.org/0000-0003-1652-9470
**Ainur Khaniyeva,** Senior Lecturer, Department of Electronics and Astrophysics, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
E-mail: mukhanova.kaznu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0167-3093
**Bakyt Khaniyev,** PhD, Associate Professor, Director of the Research Institute of Experimental and Theoretical Physics, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: khaniyev.bakyt@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0103-9201

**Abstract**
This study presents a digital prototype of a star tracker for attitude determination of small spacecraft and establishes a basis for the subsequent development of a digital twin of the device. The developed model integrates the Hipparcos star catalog, spacecraft motion and attitude models, an optical projection model, synthetic image generation, noise models, star detection and identification algorithms, and attitude estimation based on Wahba's problem. A Monte Carlo approach with 500 independent trials for each investigated configuration was used to quantitatively evaluate the system performance. The effects of the number of stars used for attitude determination, the PSF parameter, readout noise, background and solar illumination, and spacecraft angular velocity were investigated. The results show that increasing the number of stars improves the reliability of attitude determination up to a certain level. For the investigated configuration, the use of 15 stars provided an 87% successful determination probability with an RMS attitude error of 0.0396°. Within the investigated range, a PSF standard deviation of $\sigma = 2.5$ pixels provided the lowest RMS attitude error of 0.0342° and the highest successful determination probability of 87%. Read noise, background illumination, and solar glare primarily reduced the number of detected stars, whereas spacecraft angular velocity had the strongest effect on overall performance. At an angular velocity of 6°/s, the successful determination probability decreased to 14%, while no successful attitude determination was obtained at 8°/s and above. The obtained results provide a basis for selecting star tracker parameters, optimizing its algorithms, validating the model against a physical prototype, and further developing the digital prototype into a digital twin.
**Keywords:** star tracker, digital prototype, small spacecraft, attitude determination, Monte Carlo simulation.
**Conflict of Interest:** The authors declare that there is no conflict of interest.

**Н. Мейрамбекұлы[1], К. Саурова[2], К. Алипбаев[2], А.Қ. Ханиева[1], Б.А. Ханиев[1]**
*[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;*
*[2]Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан.*
*E-mail: khaniyev.bakyt@gmail.com

# ШАҒЫН ҒАРЫШ АППАРАТТАРЫНА АРНАЛҒАН ЖҰЛДЫЗДЫҚ БАҒЫТТАУ ЖҮЙЕСІН ЦИФРЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ ӨНІМДІЛІГІН ТАЛДАУ

**Мейрамбекұлы Нұрсұлтан**, PhD, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің ғылыми жобаларды талдау және үйлестіру бөлімінің басшысы, Алматы, Қазақстан;
E-mail: nursultan.meirambekuly@kaznu.edu.kz, https://orcid.org/0000-0003-2250-4763
**Саурова Камила,** Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университетінің ғарыштық инженерия кафедрасының оқытушысы, Алматы, Қазақстан;
E-mail: k.saurova@aues.kz, https://orcid.org/0009-0003-7960-8106
**Алипбаев Куаныш Арингожаевич**, PhD, қауымдастырылған профессор, Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университетінің ғылым жөніндегі проректоры, Алматы, Қазақстан;
E-mail: k.alipbayev@aues.kz, https://orcid.org/0000-0003-1652-9470
**Ханиева Айнур Қабылжанқызы**, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің электроника және астрофизика кафедрасының аға оқытушысы, Алматы, Қазақстан;
E-mail: mukhanova.kaznu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0167-3093
**Ханиев Бақыт Абайұлы**, PhD, қауымдастырылған профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институтының директоры, Алматы, Қазақстан.
E-mail: khaniyev.bakyt@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0103-9201

**Аннотация.** Бұл зерттеуде шағын ғарыш аппараттарының бағдарын анықтауға арналған жұлдыздық бағыттау жүйесінің цифрлық прототипі ұсынылып, құрылғының кейінгі цифрлық егізін әзірлеуге негіз қаланды. Әзірленген модельде Hipparcos жұлдыздар каталогы, ғарыш аппаратының қозғалысы мен бағдарын модельдеу, оптикалық проекция моделі, синтетикалық кескіндерді қалыптастыру, шу модельдері, жұлдыздарды анықтау және сәйкестендіру алгоритмдері, сондай-ақ Вахба есебіне негізделген бағдарды бағалау әдісі біріктірілген. Жүйенің өнімділігін сандық бағалау үшін әрбір зерттелетін конфигурация бойынша 500 тәуелсіз сынақтан тұратын Монте-Карло әдісі қолданылды. Бағдарды анықтау үшін пайдаланылатын жұлдыздар санының, PSF параметрінің, оқу шуының, фондық және Күн сәулесінің жарықтануының, сондай-ақ ғарыш аппаратының бұрыштық жылдамдығының әсері зерттелді. Нәтижелер жұлдыздар санын арттыру бағдарды анықтаудың сенімділігін белгілі бір шекке дейін арттыратынын көрсетті. Зерттелген конфигурацияда 15 жұлдызды пайдалану бағдарды 87% ықтималдықпен сәтті анықтауға мүмкіндік берді, бұл ретте бағдардың орташа квадраттық қателігі 0.0396° болды. Зерттелген диапазонда PSF стандартты ауытқуы σ = 2.5 пиксель болған кезде бағдардың ең төменгі орташа квадраттық түбірлік қателігі 0.0342° және бағдарды сәтті анықтаудың ең жоғары ықтималдығы 87% алынды. Оқу шуы, фондық жарықтану және Күннің жарқылы негізінен анықталған жұлдыздар санын азайтты, ал ғарыш аппаратының бұрыштық жылдамдығы жүйенің жалпы өнімділігіне ең күшті әсер етті. Бұрыштық жылдамдық 6°/с болған кезде бағдарды сәтті анықтау ықтималдығы 14%-ға дейін төмендеді, ал 8°/с және одан жоғары жылдамдықтарда бағдарды сәтті анықтау байқалмады. Алынған нәтижелер жұлдыздық бағыттау жүйесінің параметрлерін таңдауға, оның алгоритмдерін оңтайландыруға, модельді физикалық прототиппен валидациялауға және цифрлық прототипті одан әрі цифрлық егізге айналдыруға негіз болады.

**Түйін сөздер:** жұлдыздық датчик, цифрлық прототип, шағын ғарыш аппараты, бағдарды анықтау, Монте-Карло әдісімен модельдеу.
**Мүдделер қақтығысы:** авторлар мүдделер қақтығысының жоқ екенін мәлімдейді.

**Н. Мейрамбекулы[1], К. Саурова[2], К. Алипбаев[2], А.К. Ханиева[1], Б.А. Ханиев[1]**
*[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
*[2]Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева, Алматы, Казахстан.*
*E-mail: khaniyev.bakyt@gmail.com

# ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА ДЛЯ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

**Мейрамбекұлы Нурсултан,** PhD, руководитель отдела анализа и координации научных проектов, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
E-mail: nursultan.meirambekuly@kaznu.edu.kz, https://orcid.org/0000-0003-2250-4763
**Саурова Камила,** преподаватель кафедры космической инженерии, Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева, Алматы, Казахстан;
E-mail: k.saurova@aues.kz, https://orcid.org/0009-0003-7960-8106
**Алипбаев Куаныш Арингожаевич,** PhD, ассоциированный профессор, проректор по науке, Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева, Алматы, Казахстан;
E-mail: k.alipbayev@aues.kz, https://orcid.org/0000-0003-1652-9470
**Ханиева Айнур Кабылжанкызы,** старший преподаватель кафедры электроники и астрофизики, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
E-mail: mukhanova.kaznu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0167-3093
**Ханиев Бакыт Абайулы,** PhD, ассоциированный профессор, директор Научно-исследовательского института экспериментальной и теоретической физики, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан.
E-mail: khaniyev.bakyt@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0103-9201

**Аннотация.** В настоящем исследовании представлен цифровой прототип звездного датчика для определения ориентации малых космических аппаратов и заложена основа для последующей разработки цифрового двойника устройства. Разработанная модель объединяет каталог звёзд Hipparcos, модели движения и ориентации космического аппарата, модель оптического проецирования, генерацию синтетических изображений, модели шумов, алгоритмы обнаружения и идентификации звезд, а также оценивание ориентации на основе задачи Вахбы. Для количественной оценки характеристик системы использовался метод Монте-Карло с 500 независимыми испытаниями для каждой исследуемой конфигурации. Были исследованы влияния количества звёзд, используемых для определения ориентации, параметра PSF, шума считывания, фонового и солнечного освещения, а также угловой скорости космического аппарата. Результаты показывают, что увеличение количества звёзд повышает надёжность определения ориентации до определённого уровня. Для исследованной конфигурации использование 15 звезд обеспечило вероятность успешного определения ориентации 87% при среднеквадратичной ошибке ориентации 0.0396°. В исследованном диапазоне стандартное отклонение PSF σ = 2.5 пикселя обеспечило наименьшую среднеквадратичную ошибку ориентации 0.0342° и наибольшую вероятность успешного определения ориентации – 87%. Шум считывания, фоновое освещение и солнечная засветка преимущественно приводили к уменьшению количества обнаруживаемых звезд, тогда как угловая скорость космического аппарата оказывала наиболее сильное влияние на общие характеристики системы. При угловой скорости 6°/с вероятность успешного определения ориентации снизилась до 14%, тогда как при скорости 8°/с и выше успешное определение ориентации не было получено. Полученные результаты создают основу для выбора параметров звездного датчика, оптимизации его алгоритмов, валидации модели на физическом прототипе и дальнейшего развития цифрового прототипа в цифровой двойник.
**Ключевые слова:** звездный датчик, цифровой прототип, малый космический аппарат, определение ориентации, моделирование методом Монте-Карло.
**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Introduction**

The rapid growth of small-spacecraft and small-satellite technologies has increased the need for compact, autonomous, and precise attitude-determination systems. Knowledge of attitude of spacecraft is crucial for many space missions such as Earth observation, astronomical observation, communications, navigation, and spacecraft autonomy [1, 2]. In this regard, star trackers are widely regarded as highly accurate autonomous sensors for absolute attitude determination because they rely on the observed positions of stars within their field of view [3]. However, the performance of a star tracker depends on the combined characteristics of its optical system, image sensor, image-processing algorithms, star-identification method, and spacecraft motion conditions [4].

A typical star tracker is an electro-optical system made up of four main functional subsystems: a stray-light baffle, an optical system, a photosensitive detector, and an electronic and image-processing unit [5]. The baffle serves to block radiation coming from bright off-axis sources such as the Sun, the Earth, and the Moon, and the optical system projects the images of the stars onto the detector [6]. The detector then turns the optical radiation into a digital image, after which the onboard electronics process this image. The image-processing chain usually involves estimating the background, detecting the stars and determining the position of their centres, identifying the star pattern by comparing it with a catalogue stored on board, and finally estimating the attitude from the inertial star vectors that have been identified [7]. This design enables the star tracker to give autonomous three-axis attitude information without the need for an external attitude reference [8]. Yet the system's overall performance is determined by the way in which its optical, detector, computational, and environmental characteristics interact.

A wide variety of commercial star trackers is currently available for spacecraft, offering different combinations of mass, power consumption, accuracy, field of view, and dynamic performance. Examples of such devices are the ST200 and ST400 series made by Berlin Space Technologies, the Standard NST and Full-Extension NST from Blue Canyon Technologies, CubeStar from CubeSpace, the ASTRO CL and ASTRO APS/APS3 from Jena-Optronik, Spacestar from Leonardo, among others [9-16]. Although much progress has been made in terms of miniaturization and precision, one major issue that is still a problem is that of achieving precision in attitude, low weight and power consumption, and operation in conditions of stray light, noise, and spacecraft movement [17].

Several investigations have been carried out to improve star tracker performance in accuracy, reliability, miniaturization, and computational speed for spacecraft attitude control. These investigations have considered a number of different issues in regard to the design and operation of star trackers, such as optical system design, stray light reduction, star recognition algorithms, and others. Erlank and Steyn developed a CubeSat-compatible nano star tracker that demonstrated autonomous attitude estimation at 1 Hz and attitude accuracy better than 0.01° during night-sky tests, showing the feasibility of miniaturized star trackers for small spacecraft [18]. Sun et al. proposed a direct astronomical observation method to evaluate star-tracker accuracy and demonstrated pointing and rolling accuracies of 3.33'' and 23.96'', respectively, at the 3σ level, using about 18,000 s of real-sky observations [19]. Asadnezhad et al. demonstrated the importance of optical design and stray-light suppression by developing a star-tracker optical system with a 14° field of view and an RMS spot size below 4 μm, and their baffle design reduced simulated stray light by approximately 11 orders of magnitude [20]. Sang et al. demonstrated a CMOS-based nano star tracker with a mass of 150 g, a power consumption of approximately 0.85 W, and a pointing accuracy of about 5'', demonstrating the feasibility of combining arcsecond-level performance with strong miniaturization for spacecraft applications [21]. However, these studies primarily focus on individual aspects of star-tracker performance, such as miniaturization, optical design, measurement accuracy, or hardware implementation. A unified digital evaluation of the combined effects of star count, image quality, detector noise, background illumination, and spacecraft angular velocity remains comparatively limited.

The development and qualification of a high-precision star tracker typically involves several stages, including hardware design, laboratory testing, calibration, and environmental testing [22]. Even though physical testing is necessary for final verification, it is very resource-consuming and does not generally enable the examination of a large number of combinations of optical, tracker, environmental, and dynamic parameters in the early stages of development. Specifically, detector noise, background illumination, optical image quality, the number of stars that can be observed, exposure time, and spacecraft angular motion all tend to interact and affect the overall performance of attitude

determination. Digital modelling acts as a useful complementary method since it replicates the main functional chain of a star tracker in a single computational environment [23]. The model includes the generation of the stellar field, the optical projection onto the focal plane, the formation and degradation of the stellar images, the detection of the stars and the estimation of their centroids, the identification of the stars by means of a reference catalogue, and the final determination of the spacecraft's attitude. With this approach we are able to systematically vary various parameters and operating conditions in order to find out which parameters are sensitive, what the critical operating conditions are, and what the performance limitations are before building a physical prototype. In the current study the model developed is considered to be a digital prototype not a full digital twin since it has not yet attained continuous bidirectional synchronisation with a physical star tracker [24]. However, the digital prototype does provide a foundation for performance analysis and parameter optimisation, and it can be verified using experimental data before being further developed into a digital twin of the physical system.

This study aims to develop and test a digital prototype of a star tracker for small spacecraft and quantitatively evaluate how key optical, image-quality, and dynamic parameters affect attitude-determination performance. The main contributions of this study are as follows:

– development of an integrated digital prototype that combines stellar-field generation, optical projection, image degradation, star detection, star identification, and attitude estimation;

– quantitative evaluation of the effects of star count, PSF width, detector read noise, background illumination, and solar glare using Monte Carlo simulations;

– quantitative assessment of the effect of spacecraft angular velocity during image exposure on star-identification and attitude-estimation performance.

**Methodology**

*Digital Prototype Architecture*

The performance of the star tracker was investigated using an integrated digital prototype that reproduces the main stages of the attitude determination process. The model consists of interconnected modules for stellar catalogue processing, spacecraft attitude and motion modelling, optical projection, stellar image generation, image degradation, star detection, star identification, and attitude estimation (Fig. 1). This integrated structure allows evaluation of individual parameters while preserving the full processing chain from the observed stellar field to the final attitude solution. The developed model is considered a digital prototype rather than a complete digital twin because it does not provide continuous bidirectional synchronization with a physical star tracker.

The Hipparcos catalogue was used as the primary source of stellar positions and apparent magnitudes. Two catalogue subsets were used in the simulations. The stellar field generation model included stars with an apparent magnitude of $V_{mag} \leq 6$, resulting in 5041 stars. A reduced catalogue containing 1625 stars with $V_{mag} \leq 5$ was used as the reference catalogue for the star-identification procedure in order to reduce the computational load. The right ascension and declination of each star were converted into three-dimensional unit direction vectors for subsequent coordinate transformations and attitude calculations.

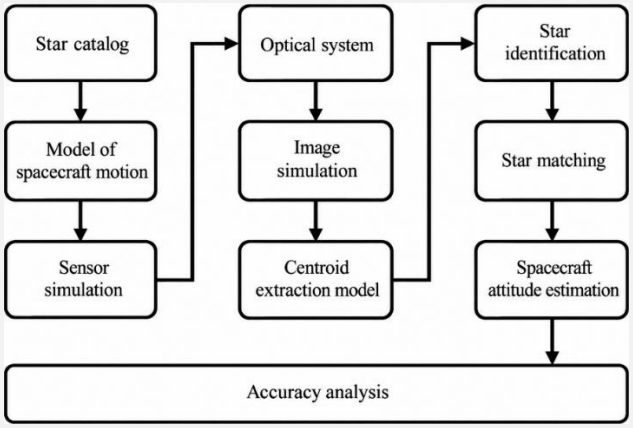



Figure 1. General architecture and processing sequence of the proposed digital prototype

The transformation from equatorial coordinates to a unit direction vector is defined as [25]:

$$s = \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where $\alpha$ is the right ascension and $\delta$ is the declination of the star.

The principal parameters of the digital prototype are summarized in Table 1.

Table 1 – Main parameters of the model

| № | **Parameter** | **Value** |
|---|---|---|
| 1 | Star catalogue | Hipparcos |
| 2 | Catalogue limit for image generation | $V_{mag} \leq 6$ |
| 3 | Number of stars | 5041 |
| 4 | Reference catalogue limit | $V_{mag} \leq 5$ |
| 5 | Reference catalogue size | 1625 |
| 6 | Field of view | 20° |
| 7 | Focal length | 35 mm |
| 8 | Detector resolution | 1024 × 1024 pixels |
| 9 | Pixel size | 20 μm |
| 10 | Baseline PSF | σ = 2.5 pixels |
| 11 | Exposure time | 0.1 s |
| 12 | Monte Carlo trials | 500 |

*Optical Projection and Stellar Image Formation*

A simplified projection approach was used to model the optical subsystem. The field of view of the star tracker was 20◦ allowing multiple stars to be observed simultaneously. The focal length was fixed at 35 mm, while the detector was considered to be 1024×1024 pixels of size 20 μm. The above values were chosen as the reference for further computations. After transformation into the tracker coordinate system, only stars located within the field of view were included in the image generation process. Their direction vectors were projected onto the focal plane according to [26]:

$$x = f\frac{x_b}{z_b}, \quad (2)$$

$$y = f\frac{y_b}{z_b}, \quad (3)$$

where $f$ is the focal length, $x_b$, $y_b$, $z_b$ are the components of the star direction vector. The focal-plane coordinates were subsequently converted into detector pixel coordinates.

A two-dimensional Gaussian point spread function (PSF) was used to model the spatial distribution of stellar intensity over adjacent detector pixels resulting from the combined effects of the optical system and detector. The intensity distribution was represented as [27]:

$$I(x,y) = I_0 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2.30}$$

where $I_0$ is the peak stellar intensity, $(x_0, y_0)$ is the image-centre coordinate, and $\sigma$ is the spatial width of the stellar image. The baseline value was set to $\sigma$ = 2.5 pixels. To investigate the sensitivity of the system to image quality, $\sigma$ was subsequently varied between 2.0 and 3.5 pixels.

*Image Degradation and Star Detection*

To simulate non-ideal observation conditions, the stellar images generated initially were altered. The three main degradation factors examined were detector readout noise, background illumination, and solar glare. Each of these factors was added separately while the other model parameters stayed at their baseline values. The reason for adopting this method was to find out how they affected star detection, the reliability of star identification, and the final attitude solution. Before carrying out star detection, an estimate of the slowly varying background component was obtained by means of a Gaussian filter having a standard deviation of 50 pixels. This estimated background was subtracted from the original image. An adaptive threshold was then applied to the corrected image in order to distinguish the stellar objects from the remaining background fluctuations. Connected-component analysis was employed to identify the individual stellar objects. The image coordinates of these objects were determined using a centroid method which took intensity into account. This process yielded the measured star positions needed for the next identification stage.

*Star Identification and Attitude Estimation*

The detected stellar objects were identified by means of the Triangle Hash pattern-recognition algorithm. This algorithm determines the correspondence between the detected stars and those in the reference catalog by means of the geometrical relationships between them. The employment of geometrical relationships enables the identification of the stars without regard to the absolute orientation of the spacecraft. After successful identification, each star that had been observed was represented by a measured unit vector in the tracker coordinate system and by a corresponding reference unit vector in the inertial coordinate system; these vector pairs were then used for attitude determination. A trial was considered successful when the star-identification stage produced a valid set of star correspondences and a corresponding attitude solution satisfying the predefined success criterion.

The spacecraft attitude was estimated by solving Wahba's problem, which determines the rotation providing the best correspondence between the measured and reference star vectors. The corresponding objective function can be written as [28]:

$$L(A) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i \left\| y^b_{meas.,i} - A y^i_i \right\|^2, \tag{1.2}$$

where $y^b_{meas.,i}$ is the measured unit vector, $y^i_i$ is its corresponding reference vector, $A$ is a rotation matrix defining the attitude, $w_i$ is the weight assigned to the $i$-th star, $n$ is the number of identified stars.

*Monte Carlo Simulation and Evaluation Metrics*

The performance of the digital prototype has been estimated through the Monte Carlo method. For each setting of parameters under analysis, 500 simulation experiments have been performed. The same number of independent trials was used for each parameter value to ensure consistent comparison between the investigated configurations. In each of them, a random initial attitude of the spacecraft was selected and then its stellar field was simulated and passed through the entire chain of the star tracker system. This procedure was applied to all investigated optical, noise, and dynamic conditions. The

system performance was evaluated using several quantitative metrics. The successful attitude determination probability was calculated as:

$$P_{success} = \frac{N_{success}}{N_{total}} \times 100\%, \quad (3)$$

where $N_{success}$ is the number of successful trials and $N_{total}$ is the total number of Monte Carlo trials. The angular attitude error was calculated for each successful trial by comparing the estimated attitude with the reference attitude. The root mean square error (RMSE) was then determined as [29]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e_k^2}, \quad (8)$$

where $e_k$ is the angular attitude error of the $k$-th successful trial and $N$ is the number of successful trials. Apart from the success probability and RMSE, the mean angular error is additionally estimated to estimate the average attitude estimation accuracy. As far as noise experiments are concerned, the average number of found stars is additionally used as another indicator of image degradation. In turn, as far as dynamic experiments are concerned, the average number of correctly verified star pairs is additionally taken into account. Such additional parameters provide an opportunity to separate the impact of image degradation and spacecraft motion on the attitude estimation error.

*Dynamic Motion Model*

The impact of the rotational movement of the space probe was examined by setting a fixed value for the angular velocity while image exposure. The angular velocity was varied from 0 to 10°/s, while the exposure time was fixed at $T_{\text{exp}} = 0.1$ s. The angular displacement of the spacecraft during one exposure was therefore determined by:

$$\Delta\theta = \omega T_{\text{exp}}, \quad (9)$$

where $\omega$ is the spacecraft angular velocity. The resulting displacement of the stellar images during exposure was used to represent motion-induced image blur. The displacement of the stars caused by such movement during image exposure was used as the model of image blur caused by motion. For instance, at an angular velocity of 10° per second and an exposure time of 0.1 seconds, there is a 1° rotation of the spacecraft during one exposure. For each angular-velocity value, 500 separate images were created and processed using the entire digital system.

The software code used to develop the digital prototype was written using Python coding language in Visual Studio Code development environment. The PyQt6 and PyQtGraph libraries were used in developing the graphical user interface and 3D visualizations, respectively.

**Results and Discussion**

A three-dimensional model was developed to enable visual monitoring of the digital prototype's operation and to verify the correctness of the algorithms (Fig. 2).

*Effect of the Number of Stars on Attitude Determination Performance*

The first series of experiments investigated the influence of the number of stars used for attitude determination on the performance of the digital prototype. The obtained results are summarized in Table 2. It was found that the performance of attitude determination depended strongly on the number of stars available. When 5 stars were available, the probability of a successful determination was only 15%, the RMS error being 0.0479°. Increasing the number to 7 and then to 10 stars raised the success rate to 72% and 84% respectively, and at the same time reduced the RMS error to 0.0428° and 0.0406°.

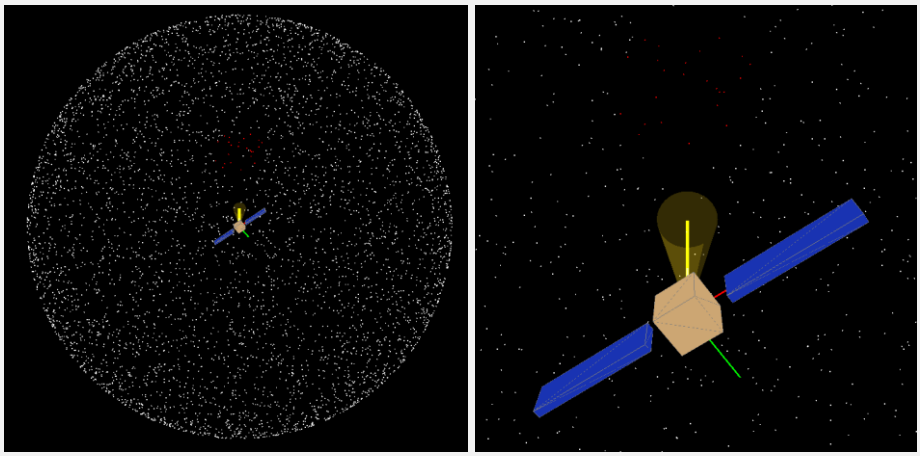


Figure 2. Three-dimensional image of the digital prototype

Table 2. Effect of the number of stars on attitude determination performance

| № | Number of stars | Successful determination, % | Mean error, ° | RMS error, ° |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 15 | 0.0453 | 0.0479 |
| 2 | 7 | 72 | 0.0387 | 0.0428 |
| 3 | 10 | 84 | 0.0373 | 0.0406 |
| 4 | 15 | 87 | 0.0359 | 0.0396 |
| 5 | 20 | 78 | 0.0385 | 0.0427 |

The best performance within the investigated range was obtained with 15 stars, yielding a successful determination probability of 87% and an RMS attitude error of 0.0396°. When the number of stars was increased to 20, the successful determination probability decreased to 78% and the RMS error increased to 0.0427°. Thus, within the investigated configurations, 15 stars provided the best observed combination of successful determination probability and attitude accuracy.

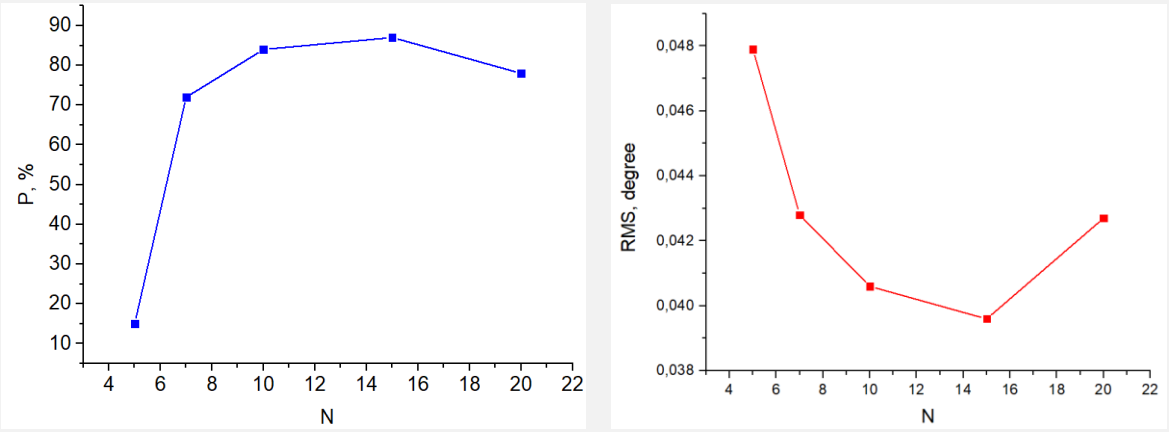



Figure 3. Dependence of the successful attitude determination probability (A) and RMS attitude error (B) on the number of stars used

*Effect of the Point Spread Function on Attitude Accuracy*

The second series of experiments examined the influence of the point spread function (PSF) on the accuracy of attitude determination. The stellar images were generated using a Gaussian PSF, and its standard deviation $\sigma$ was varied from 2.0 to 3.5 pixels. The results are presented in Table 3.

The results indicate that there is a non-linear correlation between the PSF width and attitude determination accuracy. For a value of σ equal to 2.0 pixels, the probability of a successful determination was 85%, with an RMS error of 0.0358°.

Table 3. Effect of the PSF parameter on attitude determination accuracy

| № | PSF standard deviation, $\sigma$, pixels | Successful determination, % | Mean error, ° | RMS error, ° |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.0 | 85 | 0.0326 | 0.0358 |
| 2 | 2.5 | 87 | 0.0325 | 0.0342 |
| 3 | 3.0 | 75 | 0.0381 | 0.0435 |
| 4 | 3.5 | 64 | 0.0440 | 0.0630 |

As the PSF width increased to σ = 2.5 pixels, there was an improvement, where the probability of a successful determination increased to 87% and the RMS error decreased to 0.0342°. However, an increase in σ further to 3.0 and 3.5 pixels led to a decrease in the probability of a successful determination to 75% and 64%, with the RMS error increasing to 0.0435° and 0.0630°, respectively. This trend can be explained by the broader spatial distribution of stellar intensity at larger PSF widths. As the stellar energy is distributed over a larger number of pixels, the peak intensity decreases, which can reduce centroiding accuracy and increase the probability of interference between nearby stellar images. Although σ = 2.5 pixels led to the best performance within the range of values investigated, it is specific to the digital prototype used. Fig. 4 shows the effect of the PSF parameter on the probability of successful orientation determination and the root-mean-square error of orientation determination.

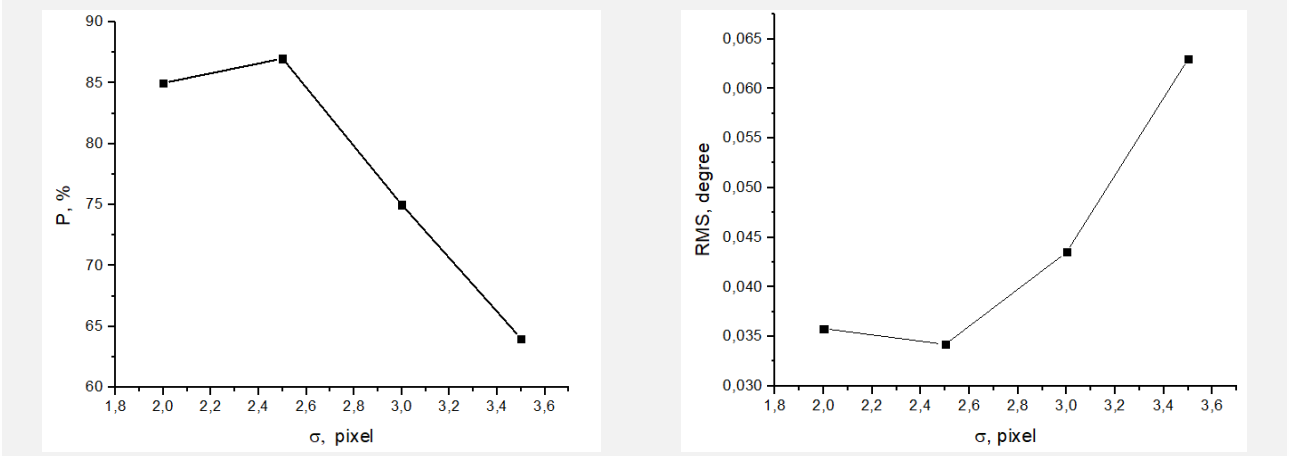



Figure 4. Dependence of the successful attitude determination probability (A) and RMS attitude error (B) on the PSF standard deviation

*Effect of Read Noise, Background Illumination, and Solar Glare*

The third series of experiments investigated the influence of image degradation factors on the performance of the digital prototype. Three factors were considered independently: detector read noise, background illumination, and solar glare. The evaluated parameters included the successful attitude determination probability, RMS error, mean angular error, number of detected stars, and number of verified star pairs.

*Read Noise.* The read noise was varied from 0 to 10 normalized model units. These values represent normalized simulation parameters rather than experimentally calibrated detector noise levels. Within this range, no pronounced degradation in attitude accuracy was observed: the RMS error remained at 0.035-0.044°, while the successful determination probability varied between 79% and 90%. However, the average number of detected stars decreased from 39.36 to 31.48, corresponding to a reduction of approximately 20%. Despite this decrease, the number of verified star pairs remained approximately 7-8. Thus, moderate read noise primarily affected star detection, while the remaining reliable star correspondences were sufficient to maintain stable attitude estimation.

*Background Illumination.* The normalized intensity of background illumination was varied from 0 to 10. The higher values of background intensity affected the star detection because the average number of detected stars decreased from 45.43 to 33.03 or 27%. In any case, the RMS error was within 0.036° and 0.045°, and the success probability ranged from 76% to 89%, not having any monotonous dependence on the background illumination level. The number of verified star pairs was usually

maintained between 7 and 8. So, it follows from the analysis conducted that the higher background illumination decreases the number of detected stars but does not significantly influence the attitude determination accuracy.

*Solar Glare.* The effect of solar glare was studied by varying the normalized solar-glare parameter from 0 to 10. The RMS error stayed between 0.034° and 0.044°, and the probability of successfully determining the stars varied from 80% to 89%, there being no obvious relationship between this probability and the level of glare. The average number of stars detected fell from 43.19 when Sun Glare was 0 to 33.89 when Sun Glare was 10, which amounts to a reduction of about 21.5%. Nevertheless, the number of verified star pairs stayed mostly between 7 and 8, showing that the remaining stars were enough to keep attitude estimation stable under the conditions examined. The results are shown in Fig. 5.

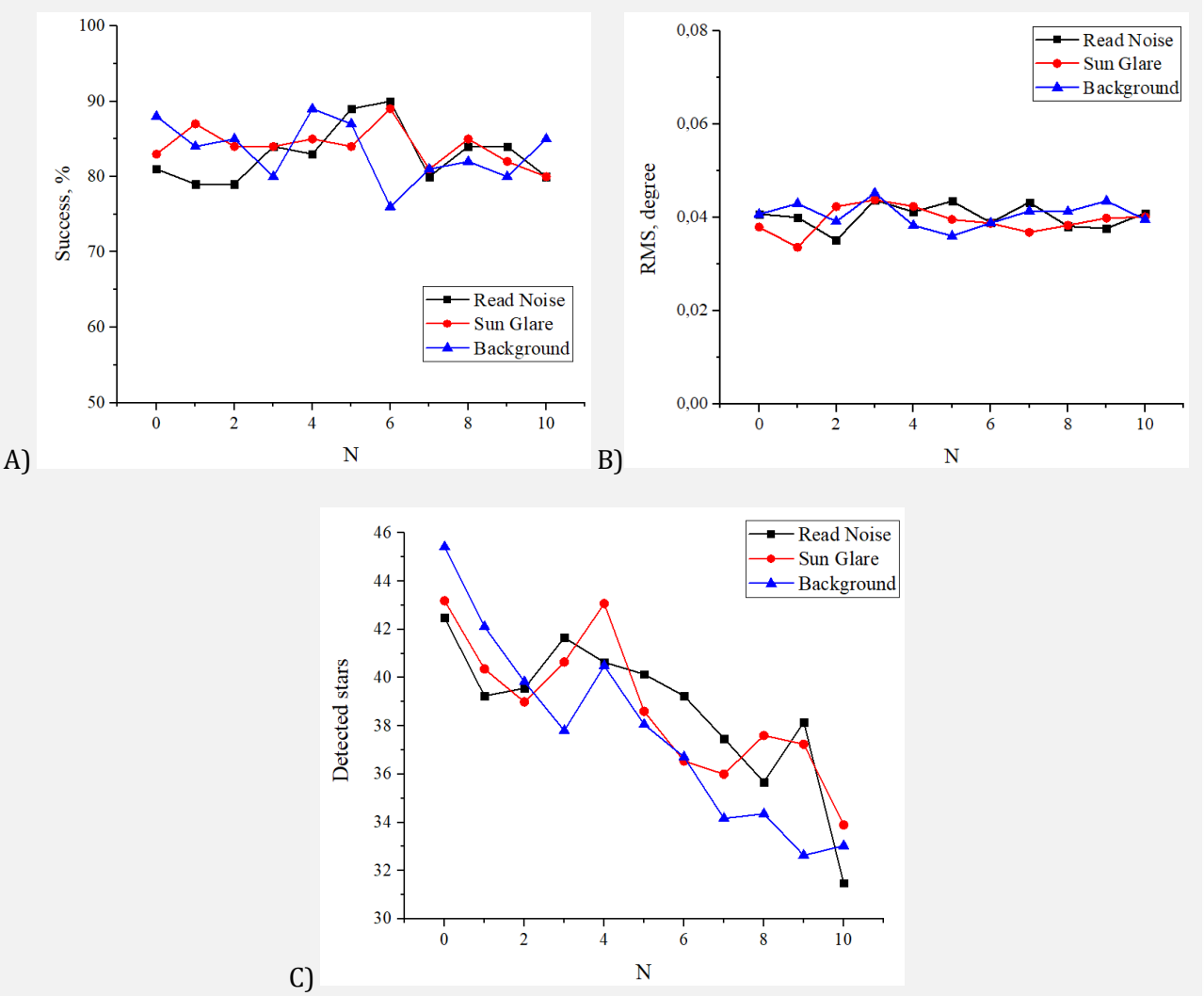



Figure 5. Effect of various types of noise on the star tracker accuracy:
A – determination probability; B – RMS error; C – detected stars.

For the investigated ranges and the adopted noise models, read noise, background illumination, and solar glare primarily affected the number of detected stars, while their influence on attitude accuracy remained comparatively small. The number of stars detected reduced by 20%, 27% and 21.5% accordingly, but the number of identified pairs and attitude accuracy remained almost the same. Thus, within the investigated parameter ranges, a reduction in the number of detected stars did not necessarily lead to failure of attitude determination, provided that sufficient geometrical information remained available for reliable star identification. But, it is true only for the given values of parameters

and noise models. Any other more severe or combined disturbances, along with optical and detector imperfections, would cause a higher level of degradation.

*Effect of Spacecraft Angular Velocity*

The final experiment investigated the influence of spacecraft angular velocity on star tracker performance (Fig. 6). Unlike the previous experiments, which primarily considered static attitude conditions, this experiment introduced spacecraft rotation during image exposure.

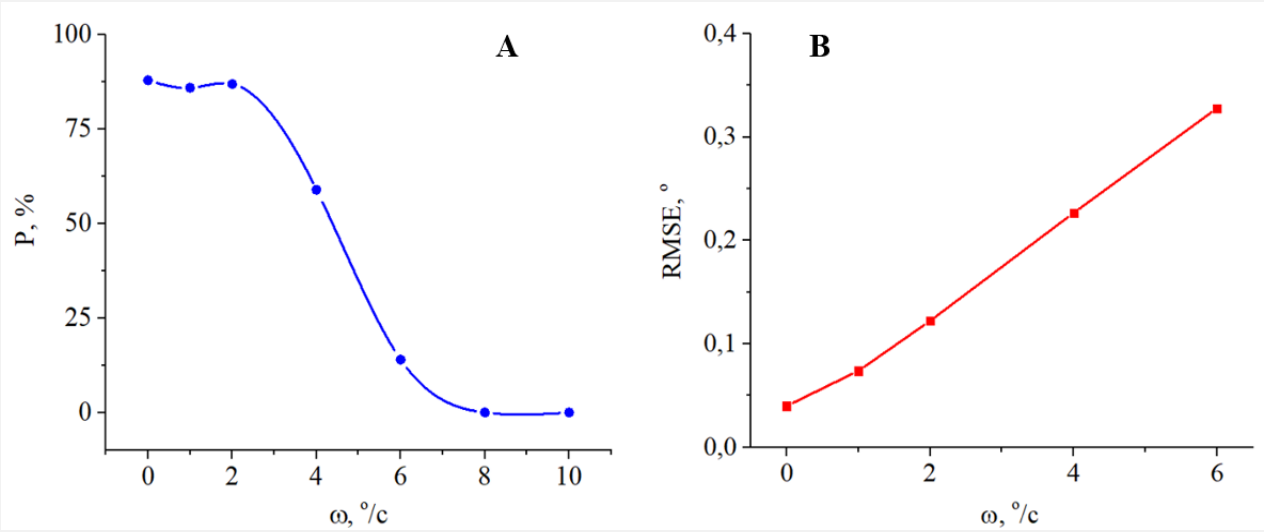



Figure 6. Effect of spacecraft angular velocity on star tracker performance: (A) successful attitude determination probability; (B) RMS attitude error

From the results obtained, it is clear that the performance of the star tracker is greatly dependent on the angular velocity of the spacecraft. In the static case, the probability of attitude determination is 88%, while the RMS error is 0.04000°. At low angular velocities of 1–2°/s, the successful determination probability remained close to the static case, although the RMS attitude error increased noticeably. At higher angular velocities, both the successful determination probability and attitude accuracy degraded substantially. At an angular speed of 4°/s, the success probability reduces to 59%, the RMS error increases to 0.22672°, and the number of verified star pairs reduces to 5.01. The most dramatic effect on the performance of the star tracker was witnessed when the angular speed was 6°/s, where the success rate reduced to 14%, the RMS error increased to 0.32792°, which is about 8.2 times the static case, and only 1.16 star pairs could be verified. No success was recorded when the angular speeds were 8°/s and 10°/s.

The key reason for the described degradation is blurring of the image of the star due to its movement over the course of the 0.1 s exposure time. The higher the angular velocity is, the larger the displacement of the star image on the focal plane will be and the more the performance of centroid calculation and star recognition will suffer from it. Unlike the noise-related parameters previously examined, that mostly had a tendency to decrease the number of stars detected, the movement of the spacecraft affected the quality of star correspondences as well as of the attitude determination itself. It is necessary to consider angular velocity, exposure time, detector and image processing parameters simultaneously when designing the system. This effect could be mitigated by decreasing the exposure time or through compensating for the motion and correcting the images, though there are compromises to be made in photon collecting efficiency and computational effort.

These four experimental groups demonstrate that the investigated factors affect different stages of the star-tracker processing chain. The number of stars and PSF affect identification and centroiding, moderate noise primarily affects the number of detected stars, while spacecraft angular velocity has the strongest negative effect on overall attitude-determination performance. In general, these experiments have demonstrated the usefulness of the digital prototype for isolating the effects of image quality, star identification, and spacecraft dynamics on attitude-determination accuracy.

While the digital prototype offers a comprehensive tool for analysis of the star tracker, there are a number of limitations that must be taken into account in the interpretation of the findings. The principal limitations include the lack of validation against a physical star tracker, the absence of bidirectional interaction with a real device, the independent variation of parameters rather than their simultaneous variation, and the fixed exposure time of 0.1 s. In addition, the noise and illumination parameters are represented using normalized simulation units rather than experimentally calibrated detector quantities. Therefore, the obtained performance values and threshold conditions should be interpreted as configuration-specific simulation results rather than direct hardware performance limits.

**Conclusion**

This study developed a digital prototype of a star tracker for small spacecraft and evaluated its performance under different numbers of observed stars, PSF widths, image-degradation conditions, and spacecraft angular velocities. The proposed model simulated all the main steps of the algorithm from generation of stellar field and formation of optical image to detection and identification of stars and attitude determination by solving Wahba's problem. The results show that the number of stars and PSF width significantly affect attitude-determination performance. Within the investigated configurations, 15 stars provided the highest successful determination probability of 87% with an RMS attitude error of 0.0396°, while a PSF standard deviation of $\sigma$ = 2.5 pixels provided the lowest RMS error of 0.0342° and a successful determination probability of 87%. Read noise, background illumination, and solar glare primarily reduced the number of detected stars, while their influence on attitude accuracy remained comparatively small within the investigated parameter ranges. However, spacecraft rotational speed caused the greatest degradation: the RMS error rose from 0.04000° in the static experiment to 0.32792° at 6°/s, and no successful attitude determination was obtained at 8°/s and 10°/s. Overall, the results demonstrate that the proposed digital prototype can be used to systematically investigate the sensitivity of star-tracker performance to optical, image-quality, and spacecraft-dynamics parameters. Future work will focus on evaluating combined environmental and dynamic effects, optimizing exposure time and image-processing algorithms, and validating the model using a physical star-tracker prototype.

**Acknowledgements**

This research was funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, grant number AP23487878.

**References**

1. Sandau R. Status and trends of small satellite missions for Earth observation //acta astronautica. – 2010. – V. 66. – №. 1-2. – P. 1-12. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2009.06.008

2. NASA. Small Spacecraft Technology State of the Art: NASA/TP–2014–216648/Rev1. - 2014. - p. 211.

3. Liebe C. C. Accuracy performance of star trackers-a tutorial //IEEE Transactions on aerospace and electronic systems. – 2002. – V. 38. – №. 2. – P. 587-599. https://doi.org/10.1109/TAES.2002.1008988

4. Sun T., Xing F., You Z. Optical system error analysis and calibration method of high-accuracy star trackers //Sensors. – 2013. – V. 13. – №. 4. – P. 4598-4623. https://doi.org/10.3390/s130404598

5. Samaan M., Theil S. Development of a low cost star tracker for the SHEFEX mission //Aerospace science and technology. – 2012. – V. 23. – №. 1. – P. 469-478. https://doi.org/10.1016/j.ast.2011.09.013

6. Yalagach A., Honeth M., Gandhi R., Aglietti G. S., Ingram C., Saxena A. Development of a deployable mechanism for a conical optical baffle for a small satellite //Advances in Space Research. – 2024. – V. 73. – №. 1. – P. 870-884. https://doi.org/10.1016/j.asr.2023.11.010

7. Zhang P., Zhao Q., Liu J., Liu N. A brightness-referenced star identification algorithm for aps star trackers //Sensors. – 2014. – V. 14. – №. 10. – P. 18498-18514. https://doi.org/10.3390/s141018498

8. Rogers G. D., Schwinger M. R., Kaidy J. T., Strikwerda T. E., Casini R., Landi A., Lorenzini S. Autonomous star tracker performance //Acta Astronautica. – 2009. – T. 65. – №. 1-2. – C. 61-74. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2009.01.045

9. ST200 [Electronic resource]. URL: https://www.berlin-space-tech.com/st200/

10. Cubespace CubeStar CT M3.0e5.3 [Electronic resource]. URL: https://www.cubespace.co.za/uploads/8760d35c-425b-428e-9750-e5498e6bb956.pdf

11. NST-3 Nano Star Tracker [Electronic resource]. URL: https://www.cubesatshop.com/product/nst-3-nano-star-tracker/
12. ST-RT Rocket Lab [Electronic resource]. URL: https://rocketlabcorp.com/space-systems/satellite-components/star-trackers/
13. Auriga SA Sodern [Electronic resource]. URL: https://sodern.com/en/categories/star-trackers
14. HE-5AS Terma [Electronic resource]. URL: https://www.satcatalog.com/component/he-5as-45-deg-baffle/
15. Horus Sodern [Electronic resource]. URL: https://sodern.com/en/ranges/horus
16. Hydra Sodern [Electronic resource]. URL: https://sodern.com/en/ranges/hydra
17. Sang P., Liu W., Cao Y., Xue H., Li B. Research on precise attitude measurement technology for satellite extension booms based on the star tracker //Sensors. – 2024. – V. 24. – №. 20. – P. 6671. https://doi.org/10.3390/s24206671
18. Erlank A. O., Steyn W. H. Arcminute attitude estimation for CubeSats with a novel nano star tracker //IFAC Proceedings Volumes. – 2014. – V. 47. – №. 3. – P. 9679-9684. https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.00267
19. Sun T., Xing F., Wang X., You Z., Chu D. An accuracy measurement method for star trackers based on direct astronomic observation //Scientific reports. – 2016. – V. 6. – №. 1. – P. 22593. https://doi.org/10.1038/srep22593
20. Asadnezhad M., Eslamimajd A., Hajghassem H. Optical system design of star sensor and stray light analysis //Journal of the European Optical Society-Rapid Publications. – 2018. – V. 14. – №. 1. –P. 9. https://doi.org/10.1186/s41476-018-0078-8
21. Sang P., Liu W., Cao Y., Xue H., Li B. Research on precise attitude measurement technology for satellite extension booms based on the star tracker //Sensors. – 2024. – V. 24. – №. 20. – P. 6671. https://doi.org/10.3390/s24206671
22. Ma Z., Wang H., Shen Y., Xue Y., Yan H. Design of hybrid refractive-diffractive star sensor optical system with wide field and small F-number //AOPC 2021: Novel Technologies and Instruments for Astronomical Multi-Band Observations. – SPIE, 2021. – V. 12069. – P. 204-209. https://doi.org/10.1117/12.2606601
23. Liu W., Wu M., Wan G., Xu M. Digital twin of space environment: Development, challenges, applications, and future outlook //Remote Sensing. – 2024. – V. 16. – №. 16. – P. 3023. https://doi.org/10.3390/rs16163023
24. MoradiFeli A., Mohammadi N. A High-fidelity digital twin for EKF-based sliding mode attitude control of multi-agent satellites //International Journal of Dynamics and Control. – 2026. – Т. 14. – №. 6. – С. 217. https://doi.org/10.1007/s40435-026-02183-1
25. Абламейко С. В., Саечников В. А., Спиридонов А. А.. Малые космические аппараты: пособие для студентов факультетов радиофизики и компьют. технологий, мех.-мат. и геогр. /– Минск БГУ. – 2012. – 159 с.
26. Lei T., Rong Y., Wang H., Huang Y., Li M. A review of vision-aided robotic welding //Computers in Industry. – 2020. – V. 123. – P. 103326. https://doi.org/10.1016/j.compind.2020.103326
27. Kim T., Zewge N. S., Bang H., Yoon H. GMM-based adaptive extended Kalman filter design for satellite attitude estimation under thruster-induced disturbances //Sensors. – 2023. – V. 23. – №. 9. – P. 4212. https://doi.org/10.3390/s23094212
28. Orozco M. L., Giraldo B. S. Attitude determination and control in small satellites: A review //IEEE Journal on Miniaturization for Air and Space Systems. – 2024. – V. 5. – №. 3. – P. 182-186. https://doi.org/10.1109/JMASS.2024.3402984
29. Schneider P., Xhafa F. Anomaly Detection and Complex Event Processing over IoT Data Streams: Chapter 3 - Anomaly detection: Concepts and methods // Academic Press. – 2022. – P. 49-66.




**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ «НАУКА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ»**

**Главный редактор:** Токбергенов И.Т.
**Научный редактор:** Есеркепов М.М.
**Ответственный редактор:** Ахметова М.С.
**Дизайнер:** Копачевский А.В.

**Подписано в печать** 25.06.2025.
**Формат 60x881/8.**

**НАО «Национальная академия наук Республики Казахстан при Президенте Республики Казахстан»**

**050010, Алматы, ул. Шевченко, 28**





НАЦИОНАЛЬНАЯ
АКАДЕМИЯ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН